997

Curso SAI de Dinámica

Alejandro Pérez Ricárdez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Básicas

Curso SAI de Dinámica

Curso SAI de
Dinámica fué dictaminado y aprobado
por el Consejo Editorial de la División de Ciencias
Básicas e Ingeniería, el 26 de abril de 1999.

Curso SAI de Dinámica

Alejandro Pérez Ricárdez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Coordinación S.A.I

ISBN: 970-654-635-9

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada
Consuelo Quiroz Reyes

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Curso SAI de Dinámica
1a. edición, 2000
5a. reimpresión, 2007
Impreso en México

CURSO SAI DE DINÁMICA

SÍNTESIS DE CONTENIDO

CURSO SAI DE DINÁMICA

CONTENIDO

CONTENIDO PÁGINA

UNIDAD IV

UNIDAD V

UNIDAD VI

UNIDAD VII

UNIDAD VIII

PREFACIO

Este material fue elaborado para ser usado como libro de texto en la Unidad de Enseñanza Aprendizaje (u.e.a) de Dinámica, que se imparte con el Sistema de Aprendizaje Individualizado (SAI) dentro del Tronco General de Asignaturas de las carreras de ingeniería en la Unidad Azcapotzalco de la Universidad Autónoma Metropolitana. Por lo que su contenido se apega en su totalidad al programa del curso.

Esta u.e.a. tiene una duración aproximada de 45 horas de clase en 30 sesiones de 1.5 horas y es cursada generalmente por los alumnos en el tercer trimestre de alguna de las carreras de ingeniería. Tienen como antecedente dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral y dos de Física. La descripción sintética de los últimos es la siguiente:

- Fuerza y Equilibrio. Se refiere fundamentalmente al equilibrio estático de partículas puntuales y brevemente de cuerpos rígidos y deformables.
- Energías Mecánica y Eléctrica. La Cinemática y Dinámica de una partícula dando especial énfasis al concepto de energía y su conservación.

En cuanto al contenido, se dividió en ocho unidades tomando en consideración que es un curso de aprendizaje individualizado y tratando que el alumno se motive al alcanzar metas especificas que no sean muy difíciles de lograr y que reflejen un avance real en su aprendizaje. Cada unidad esta organizada presentando primeramente una introducción mediante la cual se busca motivar al estudiante al estudio del tema, a continuación se desarrolla éste siempre tratando de enfatizar los conceptos físicos y reduciendo al mínimo las complicaciones con la matemática y al final se incluyen la autoevaluación y un examen tipo de cada unidad. Las unidades contienen también ejemplos resueltos que no sólo ayudan a tener un mejor entendimiento de los conceptos físicos, sino también muestran un procedimiento a seguir para resolver problemas específicos.

En el desarrollo de las unidades se ha tratado de plasmar la experiencia de 25 años del autor como profesor de tiempo completo en la Universidad Autónoma Metropolitana, evitando algunos desarrollos matemáticos difíciles de manejar para el estudiante y siempre tomando en consideración que el curso es para estudiantes de ingeniería, a los cuales aunque los motiva el estudio de las ciencias por el conocimiento mismo de la naturaleza, su enfoque es más práctico que el de los estudiantes de ciencia.

Al final se incluye una bibliografía que trata los diferentes tópicos de éste curso, con mayor profundidad y se invita a los alumnos a que acudan a ellos. Asimismo se les sugiere también que resuelvan un mayor número de problemas de los que se encuentran en estos libros, para los cual se les indica de manera específica los que les conviene resolver para lograr una mejor preparación.

Como una ayuda para el entender el porqué de la organización de este material, se describirá brevemente en que consiste el SAI. Este es un sistema de enseñanza-aprendizaje fundamentado en la participación activa del estudiante que lo motive a aprender de acuerdo a sus aptitudes y esfuerzo personal, a través del apoyo e impulso del profesor en los momentos que verdaderamente lo necesita. Las características del SAI en la unidad Azcapotzalco de la UAM, son las siguientes:

1. Se elimina la clase expositiva del profesor como fuente fundamental de información.

2. La principal fuente de información es escrita
3. El alumno acude al salón del SAI, a estudiar, a participar en discusiones de grupo, a analizar problemas con sus compañeros, a pedir asesoría y a presentar evaluaciones.

4. El contenido del curso se divide en pequeñas unidades que se evalúan en forma independiente.

5. Cada alumno aprende como resultado de su propio esfuerzo y avanza en el curso al ritmo que su capacidad le permite.

6. Se evita el esfuerzo negativo permitiendo al alumno reciclar (reiniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje), cuando falla en un examen.

7. El alumno cuenta con el apoyo del profesor y con un grupo de asesores, que le orientan y aclaran sus dudas dentro del proceso enseñanza-apredizaje.

Como consecuencia de lo que es el SAI en la UAM-Azcapotzalco, se consideró necesario la elaboración de éste libro. Se sabe que es perfectible y se le irán haciendo los ajustes que dicte la experiencia de los alumnos y profesores.

Vaya mi agradecimiento por el apoyo recibido en la elaboración de este libro por parte de los profesores: Abelardo Luis Rodríguez Soria, por su amable disposición para intercambiar puntos de vista sobre el contenido del curso, al jefe del área de Física Mauricio Bastién; a Raymundo Fajardo, por su asesoría en cuestiones de computo y a Nicolás Falcón Hernández. Asimismo a la maestra Josefina Becerril A, coordinadora del SAI, por el respaldo recibido en los aspectos administrativos.

UNIDAD I

SISTEMA DE PARTÍCULAS

I. Introducción

En cursos anteriores se han estudiado las Leyes de Newton y han sido aplicadas a lo que se le llama partículas puntuales y que resultan ser una abstracción, pues en el sentido estricto de la palabra, no existen. Bajo ciertas circunstancias, dichas leyes pueden ser utilizadas para estudiar y predecir el movimiento de los cuerpos que observamos, los cuales se pueden considerar como un agregado de un gran número de partículas. A este agregado se le conoce como un sistema de partículas el cual se define como:

"Un conjunto de puntos masa (objetos sin dimensiones) separados entre sí y considerados individualmente como partículas puntuales".

Lo que caracteriza a un sistema, es lo siguiente:

- El número de partículas que lo integran.
- Sus masas.
- Las fuerzas que ejercen unas sobre otras, Fij , llamadas fuerzas internas.

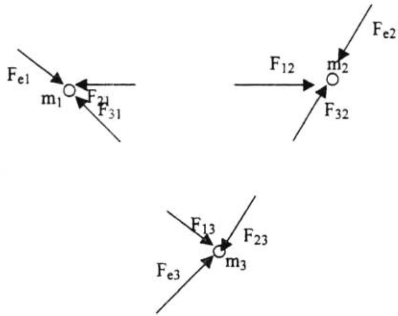
Cuando se aplica la segunda ley de Newton a un cuerpo real,

$$\mathbf{F_n}=\mathbf{ma}$$

donde $\mathbf{F_n}$ es la suma de fuerzas o la fuerza total actuando sobre m, resulta más complicado que para el caso de partículas puntuales. Para estudiar el movimiento de dicho cuerpo, se considerará como un sistema de partículas, definido anteriormente, las cuales se mantienen unidas mediante fuerzas internas que actúan entre ellas y que obedecen la tercera ley de Newton. Para evitar complicaciones con las matemáticas, el primer sistema de partículas que será considerado consiste solamente de tres partículas y los resultados que se obtengan pueden ser generalizados a sistemas más complejos.

II. Sistema de Tres Partículas.

Las fuerzas que actúan sobre cada una de las tres partículas se muestran en la figura I.1, y pueden ser divididas en dos clases, a saber: (1) Fuerzas externas (Fei) que actúan desde el exterior del sistema, y (2) Fuerzas internas (Fij) que se ejercen mutuamente las partículas.



Con el propósito de facilitar el entendimiento de lo que se presenta a continuación, se considerara que las fuerzas internas actúan a lo largo de la línea que une las partículas, sin embargo para el caso en que las fuerzas internas no son de este tipo, los resultados que se obtienen a continuación también son válidos.

Considérense las fuerzas que actúan sobre la partícula 1:

$$\mathbf{F}_{e1}+\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_{31}=m_1\mathbf{a}_1$$

Siendo $\mathbf{F}_{e1}$ la fuerza externa total que actúa sobre m_1, $\mathbf{F}_{21}$ y $\mathbf{F}_{31}$ las fuerzas internas que ejercen las partículas 2 y 3 sobre la 1, respectivamente. Ecuaciones similares se tienen para las otras dos partículas.

$$\mathbf{F}_{e2}+\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{32}=m_2\mathbf{a}_2$$

y

$$\mathbf{F}_{e3}+\mathbf{F}_{23}+\mathbf{F}_{13}=m_3\mathbf{a}_3$$

Sumando las tres ecuaciones, se obtiene.

$$\mathbf{F}_{e1}+\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_{31}+\mathbf{F}_{e2}+\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{32}+\mathbf{F}_{e3}+\mathbf{F}_{23}+\mathbf{F}_{13}=m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2+m_3\mathbf{a}_3 \qquad \text{(I-1)}$$

Pero las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton, por lo que:

$$\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}\ ;\ \mathbf{F}_{13}=-\mathbf{F}_{31}\ ;\ \mathbf{F}_{23}=-\mathbf{F}_{32} \qquad \text{(I-2)}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\mathbf{F}_n=\mathbf{F}_{e1}+\mathbf{F}_{e2}+\mathbf{F}_{e3}=m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2+m_3\mathbf{a}_3 \qquad \text{(I-3)}$$

Siendo $\mathbf{F}_n$ la suma de fuerzas externas que actúa sobre el sistema. Nótese que las fuerzas internas no intervienen en el análisis, porque se anulan entre sí, por pares.

La ecuación I-3 se puede reducir, escribiendo el lado derecho como

$$m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2+m_3\mathbf{a}_3=\frac{d^2}{dt^2}(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3),$$

Donde $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$, representan los vectores de posición de las partículas. Si ahora se define un vector **R** tal que

$$\mathbf{R}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3) \qquad \text{(I-4)}$$

En donde $M=m_1+m_2+m_3$, que es la masa total del sistema. Al vector **R** se le llama el vector de posición del centro de masa del sistema de partículas. De la ecuación I-4, se puede obtener la velocidad del centro de masa,

$$\mathbf{V}=\frac{d}{dt}\mathbf{R}=\frac{d}{dt}\frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3)$$

$$=\frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2+m_3\mathbf{v}_3)$$

y de esta la aceleración **A** del centro de masa

$$\mathbf{A}=\frac{d}{dt}\mathbf{V}=\frac{d}{dt}\frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2+m_3\mathbf{v}_3)$$

$$\mathbf{A}=\frac{1}{M}(m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2+m_3\mathbf{a}_3)$$

Mezclando este resultado con la ecuación I-3, se obtiene la ecuación

$$\mathbf{F}=M\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{R}=M\mathbf{A}$$

Así se ha encontrado que el centro de masa de un sistema de partículas, es un punto que se comporta como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en él y como si la fuerza total externa actuara sobre él.

El centro de masa es muy útil en el estudio del movimiento de translación de los cuerpos rígidos, como se verá posteriormente.

Si el sistema estuviera compuesto por N partículas en lugar de sólo tres, se obtendría el mismo resultado, esto es

$$\mathbf{F}=M\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{R}=M\mathbf{A} \qquad \text{(I-5)}$$

Donde ahora **F**, M y **R** están definidas en forma general como

$$F=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_{ei} \qquad M=\sum_{i=1}^{N}m_i \qquad \mathbf{R}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i \qquad \text{(I-6)}$$

Siendo F_{ei} la fuerza externa que actúa sobre la partícula i y **F** la fuerza externa total actuando sobre el sistema

III. Centro de Masa

1. Calculo del Centro de Masa

La ecuación I-5 se puede aplicar para facilitar la solución de problemas que impliquen el movimiento de translación de objetos reales, pero antes se debe ser capaz de calcular el centro de masa de dichos objetos así como su velocidad y aceleración. A partir de las ecuaciones I-6, se puede obtener lo que se requiere en la descripción del movimiento del centro de masa; como se muestra en los ejemplos que se presentan a continuación.

Ejemplo 1

Calcular el vector de posición del centro de masa de las tres partículas de masas iguales, que se encuentran en las posiciones (0,0), (1,2) y (2,0).

Solución:

Expresando en componentes (X,Y) la ecuación para el vector de posición de centro de masa **R,** a partir de la ecuación I-6,

$$X=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m(0)+m(1)+m(2)}{3m}=1$$

$$Y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m(0)+m(2)+m(0)}{3m}=\frac{2}{3}$$

Por lo tanto el vector de posición del centro de masa es

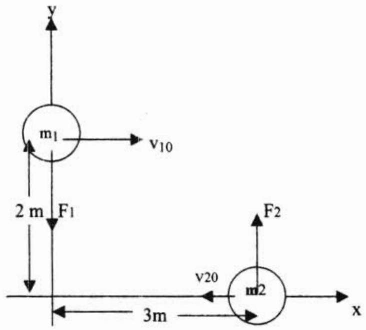
$$\mathbf{R}=(1,\frac{2}{3})$$

Ejemplo 2

Dos partículas de masas m_1 y m_2, se mueven en plano horizontal sin fricción, y tienen inicialmente las velocidades indicadas . Si a partir de esa posición se aplican las fuerzas mostradas, calcular como función del tiempo t, los vectores: aceleración, velocidad y posición del centro de masa.

$$m_2 = 3 \text{ kg} \qquad \mathbf{F}_2 = 8 \text{ N} \qquad v_{20} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_1 = 2 \text{ kg} \qquad \mathbf{F}_1 = 4 \text{ N} \qquad v_{10} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Utilizando la ecuación I-5, se tiene que

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=M\mathbf{A}$$

Pero $\mathbf{F}_1=(0,-4)$ y $\mathbf{F}_2=(0,8)$. Sustituyendo estas expresiones y M= 5 kg en la ecuación anterior

$$(0,-4) + (0,8)=M\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}=(0,\frac{4}{5})$$

Esto indica que el centro de masa describe un movimiento con aceleración constante, por lo cual su velocidad está dada por:

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_0+\mathbf{A}t$$

ecuación para la velocidad instantánea en un movimiento con aceleración constante.

Para determinar $\mathbf{V}_0$ se necesita utilizar la ecuación para la velocidad del centro de masa y tomar en consideración que $\mathbf{v}_{10}$=(2,0) y $\mathbf{v}_{20}$=(-1,0)

$$\mathbf{V}_0=\frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_{10}+m_2\mathbf{v}_{20})=\frac{1}{5}[2*(2,0)+3*(-1,0)]=(\frac{1}{5},0)$$

$$\mathbf{V}_0=(\frac{1}{5},0)$$

Como **A** es constante la posición del centro de masa en función del tiempo esta dada por:

$$\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}_o+\mathbf{V}_o t+\frac{1}{2}\mathbf{A}t^2$$

Para determinar **R**(t), primero necesitamos conocer $\mathbf{R}_o$, lo cual se puede hacer mediante la ecuación,

$$\mathbf{R}_o=\frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_{10}+m_2\mathbf{r}_{20})$$

en la figura anterior se puede apreciar que $\mathbf{r}_{10}$=(0,2) y $\mathbf{r}_{20}$=(3,0), así

$$\mathbf{R}_o=\frac{1}{5}[2*(0,2)+3*(3,0)]=(\frac{9}{5},\frac{4}{5})$$

y por lo tanto

$$\mathbf{R}(t)=(\frac{9}{5},\frac{4}{5})+(\frac{1}{5},0)t+\frac{1}{2}(0,\frac{4}{5})t^2$$

en componentes

$$X=\frac{9}{5}+\frac{1}{5}t$$

$$Y=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}t^2$$

2. Cambio de Posición del Centro de Masa

Sea m_1 y m_2 dos cuerpos que integran un sistema, si cambian su posición, el vector de posición **R** del centro del centro de masa cambiara también de acuerdo a la ecuación I-6, de la siguiente manera

$$\Delta\mathbf{R}=\frac{1}{M}(m_1\Delta\mathbf{r}_1+m_2\Delta\mathbf{r}_2)$$

y en componentes

$$\Delta Y=\frac{1}{M}(m_1\Delta \mathbf{y}_1+m_2\Delta \mathbf{y}_2) \quad \text{(I-7)}$$

$$\Delta X=\frac{1}{M}(m_1\Delta \mathbf{x}_1+m_2\Delta \mathbf{x}_2) \quad \text{(I-8)}$$

Sin embargo, si las partículas están inicialmente en reposo y empiezan a moverse bajo la influencia de una fuerza externa en la dirección vertical, la posición horizontal X del centro de masa, no debe cambiar, por lo tanto

$$\Delta X=\frac{1}{M}(m_1\Delta \mathbf{x}_1+m_2\Delta \mathbf{x}_2)=0$$

de donde se obtiene

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=-\frac{m_2}{m_1}$$

De aquí se concluye que los cambios de x_1 y x_2 tienen direcciones opuestas y tiene una relación inversa con sus masas. De ésta última ecuación se puede obtener la relación entre el cambio de x_1 con respecto a x_2, expresado como $\Delta x_{1/2}=\Delta x_1-\Delta x_2$, de la siguiente manera

$$\Delta x_{1/2}=\Delta x_1-\Delta x_2=\Delta x_1+\frac{m_1}{m_2}\Delta x_1$$

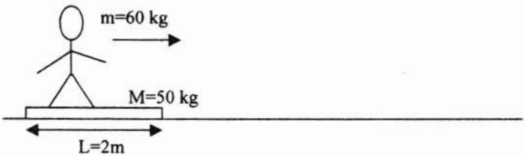
despejando Δx_1

$$\Delta x_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\Delta x_{1/2} \quad \text{(I-9)}$$

De esta relación se obtiene Δx_1 lo que mueve m_1 con respecto a un sistema fijo en el piso (laboratorio) a partir de $\Delta x_{1/2}$, que es lo que se desplaza m_1 con respecto a m_2. Esta expresión es útil en la solución de problemas que cumplen con las condiciones descritas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Una persona de masa m se desplaza sobre un tablón de masa M y longitud L, que se encuentra sobre una superficie sin fricción. ¿Qué distancia se ha movido el extremo izquierdo del tablón cuando la persona ha alcanzado el extremo derecho?



Claramente en este ejemplo, no hay fuerzas externas actuando en la dirección x y el tablón y la persona se encuentra inicialmente en reposo. En ecuación I-9, sea m_1=M (tablón) y m_2=m (la persona); al avanzar el hombre hasta el extremo izquierdo del tablón, nótese que se ha desplazado una cantidad L respecto a éste, por lo tanto el tablón respecto al hombre se ha movido -L. Así $\Delta x_{1/2}$ que es lo que se mueve el tablón respecto al hombre es claramente -L. De esta manera la distancia d que se ha movido el extremo izquierdo del tablón es:

$$d=\Delta x_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\Delta x_{1/2}=-\frac{m}{M+m}L=-\frac{60}{50+60}(2)=-1.09\text{ m}$$

Esta es la distancia que se desplaza el extremo izquierdo del tablón.

IV. Impulso y Momento Lineal

La segunda ley de Newton como se conoce generalmente

$$\mathbf{F}_n=m\mathbf{a}$$

describe la forma como las fuerzas influyen en el movimiento de los cuerpos. Sin embargo es un caso particular, cuando la masa es constante, de la forma original como la estableció Newton, en donde se consideran posibles cambios en la masa. Esto sucede en casos como las naves espaciales, cuya masa es variable dado que el combustible que se va quemando conforme asciende constituye alrededor del 90% de la masa inicial de la nave.

La referida forma de la segunda ley es:

$$\mathbf{F}_n=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

En donde a la cantidad vectorial dentro del paréntesis se le conoce como momento lineal o cantidad de movimiento, y se representa con la letra **p**

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$$

y tiene unidades de kg m/s o newton-s. Así la segunda ley en su forma alterna es

$$\mathbf{F}_n=\frac{d}{dt}\mathbf{p} \qquad \text{(I-10)}$$

Nótese que esta es una ecuación vectorial y expresada en sus componentes x,y, queda como

$$F_x=\frac{d}{dt}p_x; \qquad F_y=\frac{d}{dt}p_y$$

A partir de la ecuación I-10, se puede determinar el efecto que produce una fuerza **F**(t) en un intervalo Δt, despejando d**p**

$$d\mathbf{p}=\mathbf{F}_n dt$$

e integrando ambos lados de la ecuación

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_n dt$$

$$\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1=\Delta\mathbf{p}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_n dt \qquad \text{(I-11)}$$

Al miembro derecho de esta ecuación se le llama impulso de **Fn** y se representa con la letra **J**

$$\mathbf{J}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_n dt \qquad \text{(I-12)}$$

De la ecuación I-11

$$\mathbf{J}=\Delta\mathbf{p} \qquad \text{(I-13)}$$

Ecuación que expresa que el impulso que una fuerza $\mathbf{F}_n$ actuando en Δt, comunica a un cuerpo es igual al cambio en el momento lineal de éste.

La ecuación I-12 se puede integrar fácilmente si la fuerza es constante, en tal caso

$$\mathbf{J}=\mathbf{F}\Delta t \qquad \text{(I-14)}$$

Si varía en función del tiempo, se puede tomar el valor promedio de la fuerza y de esta manera se obtiene el impulso como:

$$\mathbf{J}=\bar{\mathbf{F}}\,\Delta t \qquad \text{(I-15)}$$

Siendo $\bar{\mathbf{F}}$ el valor promedio de la fuerza en el intervalo Δt. Asimismo

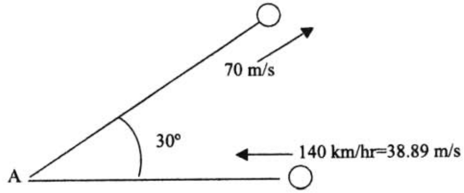
$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

En ocasiones se conoce la fuerza en función del tiempo a través de una gráfica de t versus F, en este caso se calcula la integral de **F**dt y por lo tanto **J**, mediante el área bajo la curva.

En una colisión entre dos cuerpos generalmente el tiempo que dura ésta es muy pequeño, lo cual hace que la fuerza que se ejercen mutuamente los cuerpos que colisionan sea muy grande en comparación por ejemplo con su peso, ocasionando con ello cambios violentos en su velocidad. A este tipo de fuerzas se les conoce como impulsivas.

Ejemplo 4

Un lanzador arroja una pelota de béisbol cuya masa es de 113 gr, a una velocidad de 140 km/hr hacia un bateador. La pelota es golpeada con el bat en el punto A y sale disparada en la dirección y con la velocidad que muestra la figura. Sabiendo que la pelota estuvo en contacto con el bat durante 0.012 s, determinar la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la pelota durante el batazo.



J=m(Δ**v**)

En componentes

$$J_x = m(v_{x2} - v_{x1})$$

$$J_y = m(v_{y2} - v_{y1})$$

De la figura

v_{x1}=-38.89 m/s; v_{y1}=0; v_{x2}=70*cos 30=60.6m/s v_{y2}=70*sen30=35m/s por otro lado

$$J_x = F_x \Delta t \qquad\qquad J_y = F_y \Delta t$$

Combinando estas últimas ecuaciones

$$F_x = \frac{m(v_{x2} - v_{x1})}{\Delta t} = 0.113\,\frac{60.6 - (-38.89)}{.012} = 936.9\ \text{N}$$

$$F_y = \frac{m(v_{y2} - v_{y1})}{\Delta t} = \frac{0.113(35 - 0)}{.012} = 329.6\ \text{N}$$

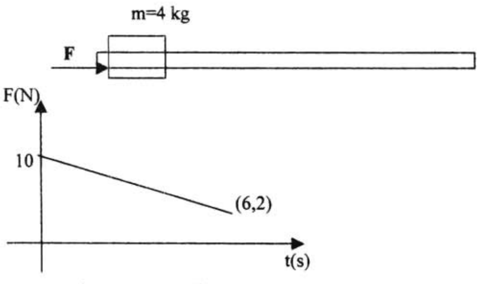
$$\mathbf{F} = (936.9,\ 329.6)$$

Y su magnitud y dirección son:

$$F = 993.2\ \text{N}; \qquad \theta = 18.4°$$

Ejemplo 5

Un collarín de 4 kg inicialmente en reposo, esta sujeto a una fuerza variable F, cuya dependencia con el tiempo se muestra en la siguiente gráfica. Determinar su velocidad en t=6 s. El coeficiente de fricción cinético, entre el collarín y la barra es de 0.1.



Este problema se puede resolver mediante la ecuación para el impulso

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p}$$

Donde

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_n \, dt$$

Siendo la fuerza total Fn=F-f, la fuerza que ejerce el collarín (F) y f la fuerza de fricción

$$J=\int_{t_1}^{t_2}(F-f)dt=\int_{t_1}^{t_2}Fdt-f(t_2-t_1)$$

Siendo t_2=6 s y t_1=0. Así mismo

$$\Delta\mathbf{p}=m(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)$$

con v_2=v(6) y v_1=0,

$$\Delta\mathbf{p}=m\mathbf{v}(6)$$

por lo tanto

$$\mathbf{v}(6)=\frac{\mathbf{J}}{m}$$

J tiene dos términos, un impulso positivo debido a la fuerza F dada en la gráfica como función de t y uno negativo debido a la fuerza de fricción la cual es constante, por lo que para la fricción se puede integrar fácilmente de acuerdo a la ecuación (I-14). La integral para la fuerza F, se tiene que calcular con el área bajo la curva que corresponde a un trapecio cuya base mayor es 10 N y la menor 2 N y la altura 6 s, como se puede apreciar en la gráfica. La fuerza de fricción está dada por

$$f=\mu N=\mu mg=0.1*4*9.8=3.92\ N$$

y

$$J=\frac{(10+2)*6}{2}-3.92*6=12.48\ Ns$$

Por lo tanto

$$v(6)=\frac{12.48}{4}=3.12\ m/s$$

UNIDAD I

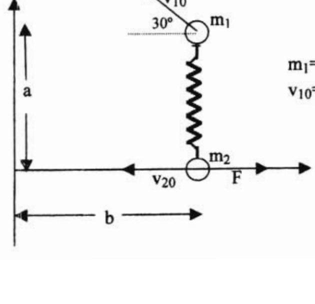
AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTAS

1. ¿El centro de masa de un objeto se encuentra necesariamente dentro de él? Dé ejemplos.
2. Algunas gentes aseguran que cuando un saltador de altura salta la barra su centro de masa se encuentra abajo de ésta. ¿Es posible esto? explicar su respuesta
3. ¿Puede el impulso de una fuerza ser cero pese a que la fuerza es diferente de cero? Explique su respuesta
4. Al deslizarse un jugador de béisbol en la segunda base su energía se disipa en forma de calor. ¿Qué ocurre con el momento lineal?
5. ¿Cómo puede una persona en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción salirse de esa superficie sin ayudarse de agentes externos?
6. Un clavadista salta de un trampolín y ejecuta una serie de maniobras. ¿Puede hacer que su centro de masa lleve a cabo un rizo una vez que se ha lanzado al agua? Explique su respuesta.
7. ¿Es posible que un bote de vela se mueva por el viento originado por un ventilador, que este unido al bote, y soplando hacía las velas? Explicar su respuesta.

PROBLEMAS

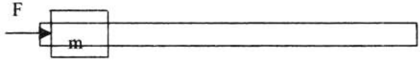
1. El sistema de partículas mostrado se encuentra sobre una mesa horizontal sin fricción. Si el resorte se encuentra deformado 10 cm, determinar los vectores aceleración, velocidad y posición del centro de masa para un tiempo t cualquiera.

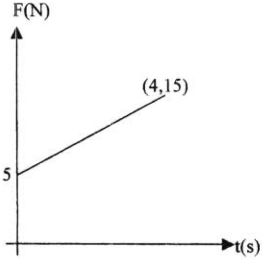


m_1=6 k; m_2=3 kg; a=3 m; b=4 m
v_{10}=5 m/s; v_{20}=3 m/s; F=200 N

2. En su vuelo un avión de 80,000 kg de peso, encuentra una bolsa de aire que tarda 1.5 seg en atravesarla, ocasionando en este tiempo que el avión adquiera una velocidad hacia abajo de 80 m/seg. Calcular el impulso recibido y la fuerza impulsiva promedio ejercida durante el tiempo de permanencia en la bolsa de aire.

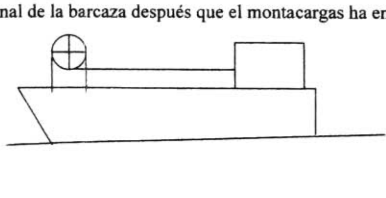
3. Sobre un collarín de 1.5 kg, actúa la fuerza F indicada en la gráfica. Si el collarín está inicialmente en reposo y el coeficiente de fricción entre éste y su guía es de 0.3, encontrar su velocidad en t=4 s.





4. Una pelota de béisbol cuya masa es de 150 g se mueve horizontalmente con una velocidad de 35 m/seg y es golpeada por un bat. Calcular el impulso y la fuerza impulsiva promedio: a)si regresándose por la trayectoria de llegada se mueve con una velocidad de 50 m/seg, b) cuando el batazo sale de faul en dirección hacia arriba y con una velocidad de 22 m/s. Suponer que la pelota está en contacto con el bat durante 0.02s.

5. Una barcaza de 3,000 kg se encuentra en reposo y está provista de un montacargas que se utiliza para mover una carga de 600 kg. Despreciando la fricción, determinar la posición final de la barcaza después que el montacargas ha enrollado 12 m de cable



UNIDAD II

LEYES DE CONSERVACIÓN I. MOMENTO LINEAL

I. Introducción

En cursos anteriores se ha apreciado la gran utilidad de las leyes de conservación, como es el caso de la conservación de la energía mecánica. Lo importante con relación a esta ley, es que nos permite entender lo que sucede con el movimiento de una partícula bajo la acción de fuerzas, sin necesidad de analizar su trayectoria con detalle. Cuando se trata de un sistema de partículas, se tienen otras leyes de conservación adicionalmente a la de conservación de la energía, las cuales en conjunto pueden ser de gran utilidad para estudiar el movimiento de un sistema. Dichas leyes también son aplicables para una partícula aunque su utilidad en ese caso, es más limitada. En esta unidad se presentará y discutirá la conservación del momento lineal, llamado también cantidad de movimiento.

II. Conservación del Momento Lineal

El vector momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula, se definió en la unidad I, como:

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$$

y el de un sistema de n partículas, como

$$\mathbf{P}=\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

Donde v_i es la velocidad de la partícula iésima cuya masa es m_i. El momento lineal de un sistema es la suma del producto de la masa m_i por la velocidad v_i, de cada partícula integrante del sistema.

En la unidad anterior también se estableció que la segunda ley de Newton, para una partícula se puede expresar como.

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}\mathbf{p} \qquad \text{(II-1)}$$

Y para un sistema de partículas como

$$\mathbf{F}_n = M\mathbf{A}$$

En donde $\mathbf{F}_n$ es el vector fuerza total externa y **A** el vector aceleración del centro de masa definida para un sistema de n partículas, como:

$$\mathbf{A} = \frac{d}{dt}\mathbf{V} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i \mathbf{v}_i}{m_i}$$

Donde **V** es la velocidad del centro de masa y M la masa total del sistema, así

$$\mathbf{A} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

la sumatoria corresponde al momento lineal del sistema (**P**)

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

Por lo que rearreglando la ecuación para **A**, queda como

$$M\mathbf{A} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\mathbf{P}$$

De esta manera la segunda ley de Newton para un sistema de partículas, se puede expresar de la forma

$$\mathbf{F}_n = \frac{d}{dt}\mathbf{P} \qquad \text{II.2}$$

Siendo $\mathbf{F}_n$ la fuerza externa total actuando sobre el sistema y **P** el momento lineal del sistema.

Así la segunda ley de Newton para un sistema de partícula, nos dice que la variación del momento lineal del sistema con respecto al tiempo es igual a la fuerza externa total.

Cuando la fuerza externa total que es la suma de las fuerzas externas que actúa sobre un sistema es cero,

$$\mathbf{F}_n = \sum F_{ext} = 0$$

Entonces, de acuerdo a la 2ª ley

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = 0$$

y por lo tanto

$$\mathbf{P}=\text{constante} \qquad \text{II.3}$$

Así cuando la suma de fuerzas externas actuando sobre un sistema es cero, el momento lineal del sistema permanece constante. A esta aseveración se le conoce como la ley de conservación del momento lineal. Nótese el carácter vectorial de esta ley, por lo que, si alguna de las componentes de la fuerza externa es cero, la correspondiente componente de **P**, se mantendrá constante aunque la otra componente no. Así

a) Si solo la componente x de la fuerza externa es cero entonces

$$F_x=0 \qquad P_x=\sum m_i v_{xi}=\text{constante} \qquad \text{II.4}$$

aunque P_y no sea constante.

b) Lo mismo sucede para la componente P_y en caso en que la componente "y" de la fuerza externa sea cero.

$$F_y=0 \qquad P_y=\sum m_i v_{yi}=\text{constante} \qquad \text{II.4}$$

Se analizarán varios ejemplos en relación a la aplicación de dicha ley.

Ejemplo 1

Sea un objeto de masa m, inicialmente en reposo, el cual explota dividiéndose en dos partes de masas m_1 y m_2, respectivamente. Las fuerzas que actúan sobre las partículas en la explosión son internas, por lo que la fuerza externa es cero y como consecuencia el momento lineal del sistema debe conservarse. Como m estaba en reposo su momento lineal antes de la explosión es cero, por lo tanto después de la explosión el momento lineal de m_1 y m_2, también debe ser cero,

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=0 \qquad \mathbf{v}_2=-\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_1 \qquad \text{II.5}$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades de las dos partículas después de la explosión. Nótese que las velocidades tienen direcciones opuestas y son inversamente proporcionales a sus masas.

Ejemplo 2

Un rifle de 5 lb dispara una bala de 0.03 lb con una velocidad de v_b=2000 pies/s. Determinar la velocidad (v_r) de retroceso del rifle justamente después del disparo.

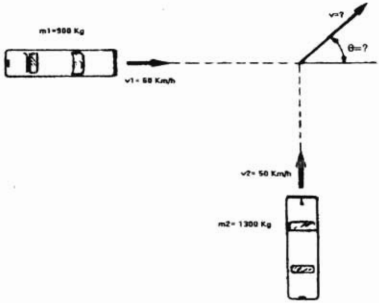
de la ecuación II.5

$$v_r=-\frac{m_b}{m_r}v_b=-\frac{0.03}{5}2000=-12 \text{ pies/s}$$

Es muy importante tener en mente el carácter vectorial del momento lineal, en particular cuando el problema implica más de una dimensión, como es el caso del ejemplo que se muestra a continuación.

Ejemplo 3

Dos vehículos 1 y 2 de masa 900 kg y 1,300 kg y con velocidades de 60 km/hr y 50 km/hr, respectivamente, chocan como muestra la figura. Si ambos vehículos se mueven juntos después de la colisión, calcular su velocidad (magnitud y dirección).



como no hay fuerzas externas el momento lineal del sistema debe ser igual antes(**P**) y después(**P'**) del choque,

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}' \quad P_x=P'_x;\ P_y=P'_y$$

Siendo $\mathbf{P}=(P_x,P_y)$ y $\mathbf{P}'=(P'_x,P'_y)$ el momento del sistema antes y después del choque, respectivamente. Las componentes x, y, son:

$$P_x=900*60=54{,}000\text{kg km/hr}$$

$$P'_x=(900+1300)v_x$$

Por lo tanto

$$54{,}000=2{,}200v_x$$

$$v_x=24.54 \text{ km/hr}$$

y la componente y

$$P_y=1{,}300*50=65{,}000$$

$$P'_y=(900+1300)v_y$$

$$2{,}200v_y=65{,}000$$

$$v_y=29.54 \text{ km/hr}$$

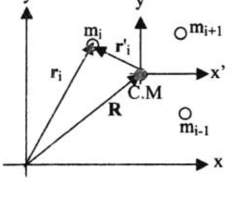
la magnitud y dirección de la velocidad después del choque son

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{24.54^2+29.54^2}=38.41\text{km/hr}$$

$$\theta=\text{ang tan}\frac{v_y}{v_x}=50.19^\circ$$

III. Sistema de Referencia Fijo en la Tierra (Laboratorio) y Sistema de Referencia Fijo en el Centro de Masa

Sea un sistema de referencia O (x,y) fijo en la tierra o uno que se mueve a velocidad constante con respecto a esta y un sistema O' (x',y') fijo en el centro de masa de un sistema de partículas



2892821

Donde $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{R}$ son los vectores de posición de la partícula m_i y del centro de masa del sistema con respecto a O, respectivamente, y $\mathbf{r}'_i$ el vector de posición de m_i con respecto a O', el sistema de referencia fijo en el centro de masa.

En la figura anterior se puede apreciar que los vectores $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}'_i$, están relacionados de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \qquad \text{II.6}$$

si se derivan ambos lados de esta ecuación con respecto al tiempo, se obtiene

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V} \qquad \text{II.7}$$

que relaciona las velocidades $\mathbf{v}_i$ de la partícula i medida con respecto a O, con su velocidad $\mathbf{v}'_i$ medida respecto al centro de masa, siendo $\mathbf{V}$ la velocidad del centro de masa con respecto al sistema de referencia O. Al sistema fijo en el piso también suele llamársele sistema fijo en el laboratorio.

A través de las relación entre las velocidades, se puede obtener también la relación entre el momento lineal $p_i=m_iv_i$ de las partículas medido desde O y $p'_i=m_iv'_i$ medido desde el centro de masa:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}'_i + m_i\mathbf{V} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i - m_i\mathbf{V} \qquad \text{II.8}$$

asimismo la energía cinética de las partículas $k'_i=\frac{1}{2}m_iv'^2_i$ y la energía total del sistema K' con respecto al centro de masa, están dadas por la siguientes expresiones

$$k'_i=\frac{1}{2}m_iv'^2_i=\frac{1}{2}m_i|vi-V|^2$$

$$K' = K - K_{cm} \qquad \text{II.9}$$

donde $K'=\frac{1}{2}\sum_i m_iv'^2_i$, $K=\frac{1}{2}\sum_i m_iv^2_i$ y $Kc.m=\frac{1}{2}MV^2$

IV. Colisiones

En los choques entre cuerpos generalmente la fuerza externa es cero o muy pequeña en comparación con la fuerza impulsiva que se genera en el momento del choque , por lo que el momento lineal del sistema permanece constante, es igual antes y después de la colisión. Como consecuencia la ley de conservación del momento lineal es indispensable en la solución de problemas de choques.

El problema general de colisiones entre cuerpos, consiste en determinar las velocidades después del choque, de dos o más cuerpos que colisionan y cuyas masas y velocidades iniciales son conocidas, como se describe a continuación:

Sean dos esferas de masas m_1 y m_2, las cuales se mueven sobre una superficie horizontal con velocidades v_1 y v_2, respectivamente, como muestra la figura. Si las esferas chocan y se conocen los valores de m_1, m_2, v_1 y v_2, determinar sus velocidades después del choque.

Sean $\mathbf{v'}_1$ y $\mathbf{v'}_2$ las velocidades de las esferas después del choque. Como en este caso la fuerza externa puede ser cero o muy pequeña en comparación con la fuerza impulsiva que actúa sobre cada cuerpo en el momento del choque, el momento lineal del sistema permanece constante. Por lo que.

$$\mathbf{P}=\mathbf{P'}$$

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=m_1\mathbf{v'}_1+m_2\mathbf{v'}_2$$

donde el miembro izquierdo de ambas ecuaciones es el momento lineal del sistema antes del choque y el miembro izquierdo el momento lineal del sistema después del choque. Sin embargo, en la última ecuación se puede apreciar que se tienen dos incógnitas $\mathbf{v'}_1$ y $\mathbf{v'}_2$ y una sola ecuación. Por lo que para determinar los valores de estas cantidades se requiere de otra ecuación, la cual será obtenida a través de tipificar los choques, que es lo que se hace a continuación.

A. Choques Inelásticos

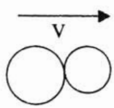
El choque inelástico se caracteriza porque los cuerpos quedan pegados después del choque, por tanto se mueven con la misma velocidad. En éste caso no se conserva la energía mecánica de los cuerpos pues hay pérdida de ésta en forma de calor y los cuerpos sufren deformaciones permanentes durante el choque. A continuación se examinará un choque inelástico entre dos cuerpos.

Ejemplo 3

La figura muestra dos esferas de barro humedo moviéndose en direcciones contrarias. Si ambas esferas quedan pegadas después del choque, determinar su velocidad.

Antes del choque

Después del choque



Aplicando la ley de conservación del momento lineal

$$(m_1+m_2)V=m_1v_1+m_2v_2$$

despejando V

$$V=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{M}=\frac{4*10+2(-5)}{6}=5m/s$$

Después del choque ambos cuerpos se mueven hacia la derecha con una velocidad de 5m/s. Analizando lo que sucede con la energía, la cual es independiente del momento lineal, se tiene que antes del choque la energía cinética del sistema es:

$$K_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2 = 0.5 * 4(10)^2 = 200 \text{ joules}$$

$$K_2=\frac{1}{2}m_2v_2^2 = 0.5 * 2(5)^2 = 25 \text{ joules}$$

$$K_t=K_1+K_2=225 \text{ joules}$$

Y después del choque

$$K_t'=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = 0.5 * 6(5)^2 = 75 \text{ joules}$$

Así se tiene que durante la colisión hubo una perdida de energía dada por

$$\Delta K=K'_t - K= -150 \text{ joules}$$

B. Choque Elástico

Un choque elástico es aquel en que la energía cinética de los cuerpos que colisionan se mantiene constante antes y después del choque, por lo que no hay pérdida de energía mecánica en forma de calor ni en forma de trabajo para deformar a los cuerpos de manera permanente.

1. Una Dimensión (Choque Central)

Para una dimensión, el movimiento de dos cuerpos que colisionan se realiza a lo largo de una línea recta antes y después del impacto.

Sean v_1, v_2 y v'_1, v'_2, las velocidades de m_1 y m_2 antes y después del choque, respectivamente. La conservación del momento lineal y de la energía cinética, requieren que:

Para el momento lineal: $$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \quad \text{(II.10)}$$

Para la energía: $$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad \text{(II.11)}$$

Lo cual constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas v'_1 y v'_2, sí se suponen conocidas las masas y las velocidades antes del impacto.

Rearreglando ambas ecuaciones

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \quad \text{(II.10')}$$

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v'^2_2 - v_2^2) \qquad \text{(II.11')}$$

y tomando en consideración que (a+b)(a-b)=$(a^2 - b^2)$, la última ecuación se puede escribir como

$$m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)(v_2 + v_2')$$

dividiendo esta ecuación entre (II.6')

$$\frac{m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')}{m_1(v_1 - v_1')} = \frac{m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)}{m_2(v_2' - v_2)}$$

reduciendo

$$(v_1 + v_1') = (v_2 + v_2')$$

la cual se puede expresar como

$$(v_1 - v_2) = -(v_1' - v_2')$$

ecuación que expresa que la velocidad relativa de los cuerpos es igual antes y después del choque solamente se invierte la dirección, que es lo que significa el signo menos. Así, las ecuaciones que se utilizan para resolver problemas de choques elásticos, son:

Para el momento lineal: $$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \qquad \text{(II.10)}$$

Para la velocidad relativa: $$(v_1 - v_2) = -(v_1' - v_2') \qquad \text{(II.12)}$$

despejando de ambas ecuaciones v_1' y v_2', las velocidades después del choque en función de las velocidades antes del choque y las masas

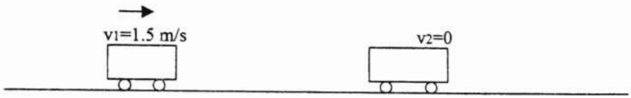
$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad \text{(II.13)}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \qquad \text{(II.14)}$$

De esta manera se pueden obtener las velocidades de m_1 y m_2 después del choque.

Ejemplo 4

Un vagón de 20 toneladas que se mueve a 1.5 m/s, como muestra la figura, choca contra otro vagón de 30 toneladas en reposo. Suponiendo que el choque es elástico, calcular la velocidad de cada vagón después del choque.



haciendo uso de las ecuaciones II.9 y II.10

$$v_1' = \frac{20-30}{50}1.5 + \frac{2*30}{50}(0) = -0.3 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2*20}{50}(1.5) + \frac{20-30}{50}(0) = 1.2 \text{ m/s}$$

se calculará ahora la velocidad relativa antes y después del choque

$$(v_1 - v_2) = 1.5 - 0 = 1.5 \text{ m/s} \qquad \text{antes del choque}$$

$$(v_1' - v_2') = -0.3 - 1.2 = -1.5 \text{ m/s} \qquad \text{después del choque}$$

de está manera se cumple la le ecuación II.10, ya que

$$(v_1 - v_2) = -(v_1' - v_2')$$

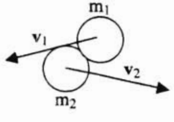
Esta relación se puede expresar de la siguiente manera para un choque cualquiera:

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_2 - v_1} = e \qquad \text{(II.15)}$$

siendo **e el coeficiente de restitución** cuyo valor depende del tipo de choque. Para el caso de un choque elástico e=1 y para un inelástico e=0. Para los choques que no son ni elásticos ni inelásticos, el valor de e se encuentra entre esos valores extremos.

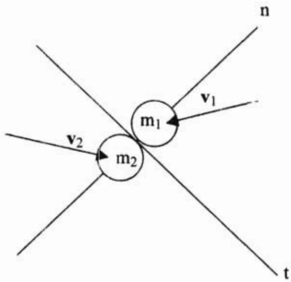
2. Dos Dimensiones (Choque Oblicuo)

Considérense dos esferas que chocan elásticamente, como muestra la figura

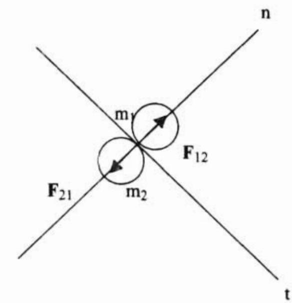


En esta situación conviene utilizar los ejes tangencial y normal en lugar de los ejes x, y, para aprovechar el hecho que la fuerza que actúa en el momento del impacto, es perpendicular a la superficie de contacto de cada esfera como se muestra en la siguiente figura

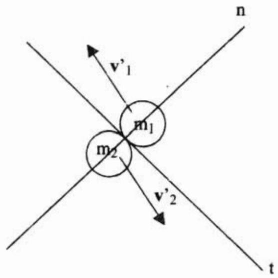
Antes del Choque



Durante el Choque



Después del Choque



Siendo $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ las fuerzas que actúan durante el impacto y que ejercen m_1 sobre m_2 y viceversa, respectivamente.

En este caso los vectores velocidad y el momento lineal, serán expresados en términos de sus componentes normal y tangencial.

$$\mathbf{v}=(v_t, v_n) \qquad \mathbf{p}=(p_t, p_n)$$

En virtud de que la fuerza que actúa sobre cada esfera en el momento del choque sólo tiene componente en la dirección normal, la componente tangencial de su velocidad debe ser la misma antes y después del choque, así

$$v_{1t} = v_{1t}' \qquad \text{(II.16)}$$

$$v_{2t} = v_{2t}' \qquad \text{(II.17)}$$

y como las fuerzas que actúan son internas la componente normal del momento lineal del sistema debe conservarse y por lo tanto, ser igual antes y después del choque:

$$P_n = P'_n$$

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n} \qquad \text{(II.18)}$$

y como el choque es elástico la energía cinética debe conservarse o equivalentemente la componente normal de la velocidad relativa,

$$v_{1n} - v_{2n} = -(v'_{1n} - v'_{2n}) \qquad \text{(II.19)}$$

de esta manera se tiene un sistema de cuatro ecuaciones (II.16, II.17, II.18 y II.19) con cuatro incógnitas $v'_{1t}, v'_{2t}, v'_{1n}, v'_{2n}$, suponiendo como datos m_1, m_2, v_1 y v_2.

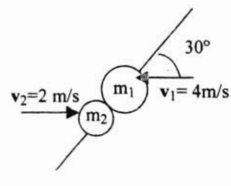
Para un choque que no sea elástico se puede seguir el mismo procedimiento descrito, cambiando la ecuación II.15 a su forma general

$$\frac{v_{1n}'-v_{2n}'}{v_{2n}-v_{1n}}=e \qquad \text{(II.20)}$$

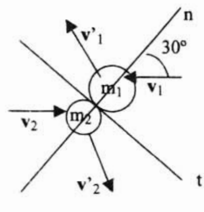
siendo e el coeficiente de restitución descrito en la ecuación II.15.

Ejemplo 5

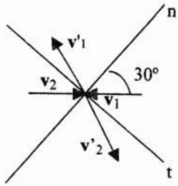
Dos discos de masas 1kg y 0.5kg, se mueven sobre una pista horizontal y chocan en el instante que se mueven con las velocidades y en la forma que muestra la figura. Si el choque es elástico (e=1), calcular las velocidades de cada disco después del choque.



En este caso se deben usar los ejes normal y tangencial, los cuales se muestran en la siguiente figura



con el propósito de facilitar el entendimiento del problema, se hará un diagrama en donde solo aparezcan los ejes y las velocidades



Aplicando las ecuaciones II.16 y II.17 y notando que el vector v_2 forma el mismo ángulo con el eje normal que el vector v_1

$$v_{1t} = v_{1t}' = -v_1 * \text{sen } 30 = -4\text{sen}30 = -2\text{m/s} \qquad (1)$$

$$v_{2t} = v_{2t}' = 2\text{sen}30 = 1\text{m/s} \qquad (2)$$

de ecuaciones II.14 y II.15

$$v_{1n} + 0.5v_{2n} = v'_{1n} + 0.5v'_{2n} \qquad (3)$$

$$v_{1n} - v_{2n} = -v'_{1n} + v'_{2n} \qquad (4)$$

sumando término a término estas dos ecuaciones, se obtiene

$$2v_{1n} - 0.5v_{2n} = 1.5v'_{2n}$$

$$v'_{2n} = \frac{2v_{1n} - 0.5v_{2n}}{1.5}$$

pero $v_{1n} = -4\cos 30 = -3.44$ m/s y $v_{2n} = 2\cos 30 = 1.72$ m/s

$$v'_{2n} = \frac{2*(-3.44) - 0.5*1.72}{1.5} = -5.16 \text{ m/s}$$

de ecuación (4) se despeja v'_{1n}

$$v'_{1n} = v_{2n} + v'_{2n} - v_{1n}$$

$$v'_{1n} = 1.72 - 5.16 + 3.44 = 0$$

finalmente las velocidades de m_1 y m_2, después del choquen son, respectivamente

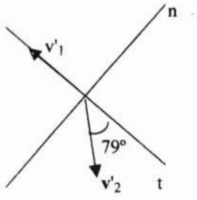
$$\mathbf{v'}_1 = (-2,0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v'}_2 = (1,-5.16)$$

y sus magnitudes y direcciones

$$v'_1 = 2\text{m/s} \qquad \Theta_1 = 0$$

$$v'_2 = 5.26\text{m/s} \qquad \Theta_2 = -79^\circ$$

la dirección esta dada con respecto al eje tangencial como se muestra en la siguiente figura



UNIDAD II

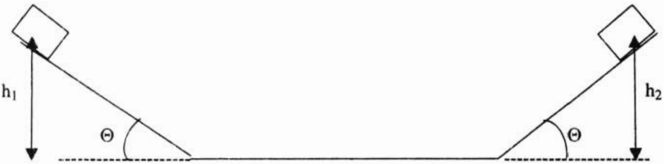
AUTOEVALUACIÓN

Preguntas

1. En el inciso IV de esta unidad se mencionan dos condiciones independientes bajos las cuales es aplicable la ley de conservación del momento lineal, ¿cuáles son?
2. En qué tipo de choques se conserva la energía y en cuáles no. En lo que no se conserva, ¿a qué se debe que esto suceda?.
3. ¿Cuánto vale el coeficiente de restitución e para un choque inelástico? y ¿cuanto para un elástico? Para un choque que no es elástico, ni inelástico ¿qué valores puede tomar e?
4. De dos ejemplos de colisiones elásticas
5. Dos satélites de igual masa viajan en sentidos contrarios en la misma órbita, si chocan describa su movimiento después de éste si el choque es elástico y si es inelástico.
6. En un choque entre dos vehículos, ¿qué es más conveniente para los pasajeros, que los vehículos se deformen o que tiendan a mantener rígidamente su forma?
7. Dos esferas de plastilina de igual masa y velocidad chocan entre sí, y llegan al reposo. ¿Se conserva el momento lineal antes y después del choque? ¿qué pasa con su energía cinética?

Problemas

1. Un bloque de masa m_1=0.5 kg se desliza sobre una rampa cuyo ángulo de inclinación es teta y altura h_1=1m, como se muestra en el diagrama. Simultáneamente un segundo bloque de masa m_2=0.7 kg, se desliza sobre otra rampa con un ángulo de inclinación teta y altura h_2 =1.5 m. Ambos bloques parten del reposo desde la parte superior de cada rampa y se observa que chocan en el piso que se encuentra entre las rampas. Suponiendo que no actúan fuerzas de fricción, calcular la magnitud y dirección de la velocidad de cada bloque, después del choque, para los siguientes casos.
   a) El choque es elástico
   b) El choque es inelástico
   c) Determinar la perdida de energía en cada caso.

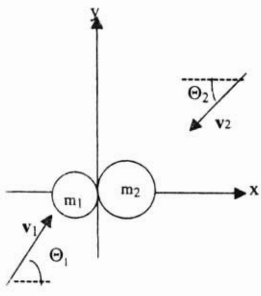


2. Las dos esferas que muestra la figura, se mueven con las velocidades v_1 y v_2. y chocan elásticamente.

   a) Escribir las cuatro ecuaciones que permiten calcular las velocidades después del choque, $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_2$.

   b) Calcular las velocidades después del choque, sí

   m_1=1kg; m_2= 2kg; v_1=4 m/s; v_2=2m/s; Θ_1=40° y Θ_2=25°



UNIDAD III

LEYES DE CONSERVACIÓN II. MOMENTO ANGULAR

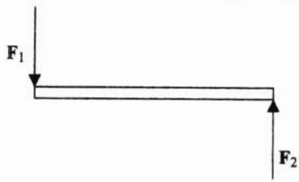
I. Introducción

Cuando se estudiaron las partículas puntuales se estableció que si la suma de fuerzas que actúan sobre una de ellas es cero, entonces su aceleración es cero y por lo tanto su velocidad es constante. Supóngase que se tiene una partícula puntual de masa m, sujeta a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, iguales en magnitud pero en sentido contrario

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_n}{m} = 0 \longrightarrow \mathbf{v} = \text{const.}$$

Sin embargo esto no es válido para un cuerpo el cuál tiene dimensiones, como se muestra en la siguiente barra metálica la cual está sujeta a dos fuerzas iguales y de sentidos opuestos

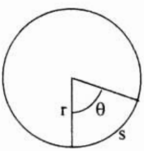


En este caso aunque la suma de fuerzas externas es cero y por consiguiente el centro de masa de la barra se moverá con aceleración cero y a velocidad constante, la aceleración del cuerpo no es cero y como consecuencia tampoco su velocidad es constante, la razón es que la barra va a girar alrededor del centro de masa, por lo que tiene una aceleración con una componente dirigida hacia el centro de la circunferencia descrita por cada punto de la barra que es la llamada aceleración centrípeta como se vio en el curso de Energías Mecánica y Eléctrica; asimismo se tiene también una componente que es tangente a la circunferencia y se le conoce como aceleración tangencial. Ambas aceleraciones serán analizadas en la siguiente unidad.

Para estudiar el movimiento circular de un sistema de partículas, como el caso de la barra, conviene introducir nuevas cantidades físicas como son: la velocidad y aceleración angulares, la torca o momento de una fuerza y el momento angular. Estas cantidades serán definidas a continuación.

II. Movimiento Circular

Para estudiar el movimiento circular de un objeto, aunque es posible hacerlo en coordenadas rectangulares (x, y), conviene llevarlo a cabo en coordenadas polares (θ,r)



donde s es el arco y θ el ángulo medido en radianes. Cuando θ se mide en radianes, la siguiente relación entre r y θ, es válida

$$\theta = s/r \qquad \text{ó} \qquad s = \theta r \qquad \text{(III.1)}$$

siendo un radian igual al ángulo que subtiende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.

Si ahora definimos la velocidad angular ω como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{III.2)}$$

y derivando s de la ecuación III.1 con respecto al tiempo, para un movimiento circular (r=cte.)

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

siendo el término del lado izquierdo, la magnitud de la velocidad de translación v

$$v=\omega r \qquad \text{(III.3)}$$

ecuación que solamente es válida cuando ω es medida en rad/s.

Se definirá ahora la aceleración angular α, como

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{(III.4)}$$

donde a se mide en rad/s^2.

Integrando las ecuaciones III.2 y III.4 con α=cte, se pueden obtener ecuaciones para θ y ω similares a las de la posición y velocidad para un movimiento con aceleración constante

$$\omega=\alpha t+\omega_0 \qquad \text{(III.5)}$$

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2+\omega_0 t+\theta_0 \qquad \text{(III.6)}$$

combinando estas dos ecuaciones y eliminando t

$$\omega^2 = \omega_0^2+2\alpha\theta \qquad \text{(III.7)}$$

III. Momento Angular

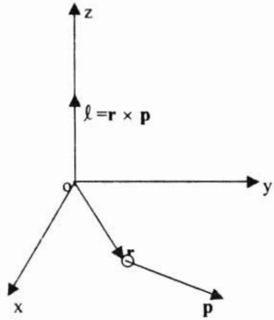
Sea una partícula de masa m, con momento lineal **p** y que se encuentra en una posición **r** respecto al origen o (ver siguiente figura). Si suponemos que la partícula se mueve en el plano xy, entonces tanto el vector **r** como **v**, descansan en este plano. Se define el vector momento angular ℓ de la partícula, con respecto al origen o, como el producto vectorial (o producto cruz) entre ℓ y **p**

$$\ell=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \qquad \text{(III.8)}$$

en esta definición está implícita la importancia del origen ya que **r** es definida respecto al origen. La magnitud de ℓ está dada por

$$\ell=rp\,\text{sen}\theta=pr_\perp=rp_\perp$$

donde θ en el ángulo entre **r** y **p**, $r_\perp$ es la proyección perpendicular de **r** sobre la línea de acción de **p** y $p_\perp$ es la componente perpendicular de **p** a **r**. Nótese que las unidades del momento angular son m-kgm/s, o bien joule*s.



La dirección de ℓ es perpendicular a los vectores **r** y **p,** en este caso a lo largo del eje z como se indica en la figura, ya que si se aplica la regla de la mano derecha haciendo girar **r** sobre **p**, a través de doblar los dedos de la mano derecha de **r** a **p**, el dedo pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z.

Si ahora se deriva la ecuación (III.8) con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\ell = \frac{d}{dt}\,\mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$= \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\,\mathbf{p} + (\frac{d}{dt}\,\mathbf{r}) \times \mathbf{p}$$

$$= \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\,\mathbf{p} + \mathbf{v} \times m\mathbf{v}$$

pero el segundo término de ésta ecuación es cero ($\mathbf{v} \times m\mathbf{v}=0$), ya que ambos vectores son paralelos y por lo tanto el ángulo entre ellos es cero y esto implica que su producto vectorial es cero. Así se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\ell}=\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}\mathbf{p}$$

pero recordemos de la unidad I, que para una partícula

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}=\Sigma\mathbf{F}_i$$

donde $\mathbf{F}_i$ son las fuerzas actuando sobre la partícula

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\ell}=\mathbf{r}\times\Sigma\mathbf{F}_i$$

el término del lado derecho de ésta ecuación define lo que se le llama la torca total o neta (τ)de la fuerzas $\mathbf{F}_i$ con respecto al origen o. Así

$$\tau_n=\Sigma\tau_i=\frac{d}{dt}\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(III.9)}$$

donde τ_n es la torca neta y $\tau_i=\mathbf{r}\times\mathbf{F}_i$ .es la torca de la fuerza $\mathbf{F}_i$. Esta ecuación es la forma de la 2ª Ley de Newton para el movimiento de rotación de una partícula y es equivalente a la forma conocida para los movimientos de traslación de una partícula, como se presenta en la ecuación I.10

$$\mathbf{F}_n=\frac{d}{dt}\mathbf{p}$$

Comparando ambas ecuaciones, se observa que en la ecuación III.9, la torca τ juega el papel de la fuerza **F** y el momento angular ℓ el del momento lineal **p**.

Si ahora consideramos un sistema formado por N partículas, el momento angular **L** del sistema esta dado por.

$$\mathbf{L}=\ell_1+\ell_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ell_N=\Sigma\ell_i$$

Donde ℓ_i es el momento angular de la partícula i.

Derivando L con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}=\frac{d}{dt}\ell_1+\frac{d}{dt}\ell_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{d}{dt}\ell_N$$

de acuerdo a ecuación III.9, $\tau_n=\frac{d}{dt}\ell$, entonces

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \sum \tau_n$$

de esta manera la variación con respecto al tiempo del momento angular de un sistema de partículas es igual a la torca neta que actúa sobre el sistema.

Si consideramos que la suma de las torcas que actúan sobre un sistema de partículas, incluye tanto torcas externas producidas por fuerzas externas, como por torcas internas producidas por fuerzas internas,

$$\sum \tau_{n} = \sum \tau_{externas} + \sum \tau_{internas}$$

y si además suponemos que las fuerzas internas cumplen la tercera ley de Newton en su forma fuerte, lo cual implica que las fuerzas entre pares de partículas no solamente son iguales y opuestas, sino que además actúan a lo largo de la línea que las une; a diferencia de la forma débil en que pese a ser las fuerzas iguales y de sentido contrario, no actúan a lo largo de la línea que une las partículas . El hecho de que la fuerzas internas cumplan con la forma fuerte de la tercera ley de Newton, tiene como consecuencia que las torcas internas sean cero y la expresión para $\frac{d}{dt}\mathbf{L}$, quede como:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \sum \tau_{externas} \qquad \text{(III.10)}$$

en donde $\sum \tau_{externas}$ corresponde a la suma de torcas producidas por las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

IV. Conservación del Momento Angular

En la sección anterior se obtuvo la ecuación III.10, para la razón de cambio del momento angular de un sistema de partículas

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \sum \tau_{externas}$$

Si la suma de las torcas externas($\sum \tau_{externas}$) actuando sobre un sistema de partículas es cero, entonces

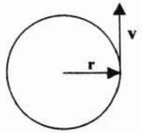
$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = 0 \text{ lo cual implica que } \mathbf{L} = \text{constante} \qquad \text{(III.11)}$$

Esta ecuación equivale a la *ley o principio de conservación del momento angular,* el cual establece que: *"si la torca total externa que actúa sobre un sistema de partículas es cero con respecto al origen o, el momento angular del sistema permanece constante con respecto a o".*

Ejemplo 1

Una pequeña partícula de masa m se mueve con velocidad v y describe una trayectoria circular de radio r, como muestra la figura. Encontrar su momento angular con respecto al centro del de la circunferencia y demostrar que se puede escribir en función de la velocidad angular.

Solución:



Nótese que en este caso el vector de posición tiene magnitud igual al radio de la circunferencia y una dirección igual a la del vector unitario **i**, esto es **r**=r**i**, asimismo el vector momento lineal esta dado por **p**=mv**j**, ya que la velocidad apunta en la dirección del vector unitario **j**. Por lo tanto

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=r\mathbf{i}\times mv\mathbf{j}=mr\,v(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$$

$$\mathbf{L}=mrv\mathbf{k} \qquad \text{ya que} \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$$

de ecuación III.3 $v=\omega r$

$$\mathbf{L}=mr^2\omega\mathbf{k}$$

al término mr^2 se le conoce como el momento de inercia de m respecto a O y se representa como I, tiene unidades de kg-m^2 . Así el momento angular se puede expresar también de la siguiente forma:

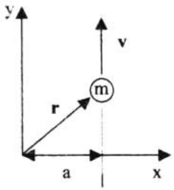
$$\mathbf{L}=I\omega \qquad \text{III.12}$$

esta ecuación relaciona al momento angular **L** con el vector velocidad angular ω y aunque se dedujo para un caso particular, es válida en general. Posteriormente se hablará con más detalle sobre el momento de inercia.

Ejemplo 2

Demostrar que el momento angular de una partícula que se mueve con velocidad constante paralelamente al eje y, y en el plano xy, es constante.

Solución:



Nótese que de la figura que **r**=x**i**+y**j** y que **v**=v**j**; como x=a, entonces

$$\mathbf{r}=a\mathbf{i}+y\mathbf{j}$$

por tanto

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=m(a\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times(v\mathbf{j})$$

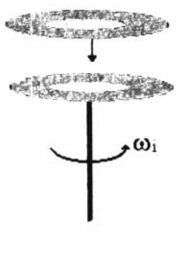
$$=mav(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+mv(\mathbf{j}\times\mathbf{j})$$

$$\mathbf{L}=mav\mathbf{k}\qquad \text{ya que } \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\ \text{ y }\ \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0$$

Así **L** es constante ya que a y v son constantes.

Ejemplo 3

Un disco de 200 gr. y un radio de 10 cm está fijo a un eje que gira con velocidad angular de 2π rad/s, como muestra la figura. Súbitamente se deja caer sobre el disco, otro disco idéntico al primero, inicialmente en reposo. La fuerza de fricción entre los discos, permite que giren con la misma velocidad. Calcular la velocidad de giro de ambos discos



Solución:

En virtud de no existir torcas externas, ya que en este caso las fuerzas de fricción son internas y el peso es anulado por la normal, el momento angular del sistema formado por los dos discos se conserva.

$$\mathbf{L}=\text{constante}$$

$$L_i=L_f$$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f}$$

pero $I_{disco} = \frac{1}{2}mr^2$ por tanto el momento de inercia inicial es $I_i = \frac{1}{2}mr^2$ y el final $I_f = \frac{1}{2}(2m)r^2 = mr^2$, de esta manera

$$\omega_f = \frac{1}{2}\frac{mr^2\omega_i}{mr^2} = \frac{1}{2}\omega_i$$

$$\omega_f = \pi rad/s$$

Ejemplo 4

Un astronauta que lleva a cabo una caminata espacial, está atado a una nave espacial por medio de una cuerda tensa de 150m de longitud. Una operación no intencional del paquete propulsor provoca que el astronauta adquiera una velocidad de 5 m/s, de forma tal que describe una trayectoria circular. Para regresar a la nave el astronauta comienza a jalarse a lo largo de la cuerda en forma lenta y constante, ¿cuál es la velocidad del astronauta en los puntos a y b situados a 100 m y 50 m de la nave?

Solución:

Como no actúan torcas externas sobre el astronauta ya que ninguna fuerza externa actúa sobre él, su momento angular respecto a la nave se conserva.

El momento angular inicial respecto a la nave es

$$L_0=mv_0r\,sen90°=mv_0r \qquad r=150\text{ m y } v_0=5\text{ m/s}$$

ya que en una trayectoria circular **v** es perpendicular a **r**. En el punto a

$$L_a=mv_1a \qquad a=100\text{ m}$$

donde v_a es la velocidad del astronauta en el punto a, pero

$$L_a=L_0$$

$$mv_0r=mv_aa$$

$$v_1=v_0r/a=5*150/100=7.5 \text{ m/s}$$

en el punto b

$$L_b=mv_bb \qquad b=50 \text{ m}$$

v_b es la velocidad en el punto b, igualando L_0 a L_b

$$mv_0r=mv_bb \qquad v_b=v_0r/b=5*150/50=15 \text{ m/s}$$

V. Momento Angular y Torca Medidos desde el Centro de Masa (O') y su Transformación al Sistema O Fijo en el Laboratorio (Piso).

En esta unidad se ha hablado del momento angular de una partícula y de un sistema de partículas, medidos desde un sistema fijo en el laboratorio, definidos como

$$\ell_i=\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{L}=\Sigma \ell_i$$

asimismo se definió la torca actuando sobre una partícula y la torca total con respecto al sistema O, como

$$\tau=\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\tau_{TOT}=\Sigma\tau_i$$

cantidades que respectivamente se definen con respecto al centro de masa como:

$$\ell'_i=\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$$

$$\mathbf{L}'=\Sigma\ell'_i$$

$$\tau'_i=\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}''_i$$

$$\tau'=\Sigma\tau'_i$$

las ecuaciones de transformación que llevan del sistema centro de masa (O') al sistema fijo en el laboratorio (O) y viceversa, se obtienen aplicando las relaciones II.6, II.7 y II.8, de la siguiente manera:

$$\ell'_i=\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i =(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{p}_i - m_i\mathbf{V}) \qquad \text{III.13}$$

$$\mathbf{L}'=\mathbf{L} - \mathbf{L}_{c.m} \qquad \text{III.14}$$

$$\tau'_i=\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}''_i=(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{A}) \qquad \text{III.15}$$

$$\tau'= \tau - \tau_{c.m} \qquad \text{III.16}$$

donde **R**, **V** y **A** son los vectores de posición, velocidad y aceleración del centro de masa medidos del sistema O. Asimismo, los vectores $\mathbf{L}_{c.m}$ y $\tau_{c.m}$, están dados por:

$$\mathbf{L}_{c.m}=\mathbf{R} \times M\mathbf{V}$$

$$\tau_{c.m}=\mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext}$$

UNIDAD III

AUTOEVALUACIÓN

Preguntas

1. ¿Cómo se define el momento angular de un objeto? ¿En qué unidades se mide?

2. ¿Cómo se determina la dirección del vector momento angular?

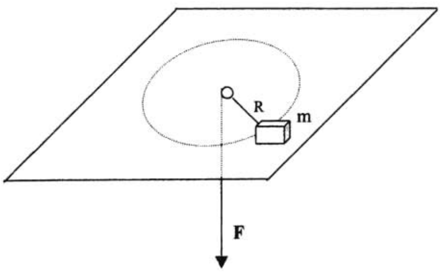
3. ¿Bajo qué condiciones se conserva el momento angular de un sistema?

4. Escribe la forma de la segunda ley de Newton para un movimiento de rotación de un sistema y para un movimiento de traslación.

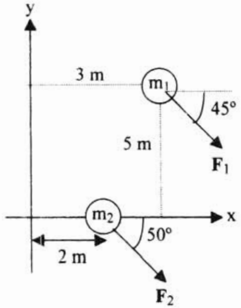
5. Comparando las dos formas de la segunda ley de Newton a que se refiere la pregunta 4, ¿cuál es el análogo de la fuerza y cuál del momento lineal?

Problemas

1. Un pequeño bloque de 100 g se puede deslizar sobre una mesa horizontal lisa. El bloque está atado a una cuerda que pasa por un agujero O en la mesa, como muestra la figura, en el otro extremo de la cuerda se aplica una fuerza F verticalmente. Inicialmente el bloque describe una circunferencia de radio R=500 mm bajo la acción de una F=20 N. En cierto momento la fuerza F se reduce súbitamente al valor de 10 N y entonces el bloque describe una espiral hacia fuera. Determinar su velocidad cuando R=600 mm



2. Dos partículas de masa m_1= 2 kg y m_2= 4 kg, se encuentran inicialmente en reposo sobre un plano horizontal sin fricción, como muestra la figura. Si sobre ellas actúan las fuerzas externas de magnitudes F_1=20 N y F_2=15 N, calcular: a) la torca externa total que actúa sobre el sistema, con respecto a O, b) lo mismo que en el inciso a), pero respecto al centro de masa.



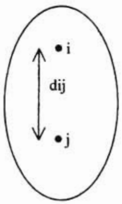
3. Un carrusel de radio 2m y momento de inercia 700 kg m2 está girando alrededor eje sin rozamiento a razón de 1.5 vueltas cada segundo . Un muchacho de masa 50 kg que inicialmente se encuentra parado en el centro del carrusel, se desplaza hacia el borde de éste. Calcular la nueva velocidad angular del carrusel, una vez que el muchacho alcanza el borde.

UNIDAD IV

CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO EN UN PLANO

I. Introducción

Hasta aquí se ha estudiado el movimiento de partículas, ahora se estudiará el movimiento del cuerpo rígido, el cual se define como el cuerpo cuya distancia entre dos de sus puntos cualquiera es constante:



d_{ij}=constante

esto implica que el cuerpo no sufre deformaciones. Es importante el estudio del cuerpo rígido, particularmente para la ingeniería, porque permite el diseño de partes y en general mecanismos que son utilizados en todo tipo de maquinas.

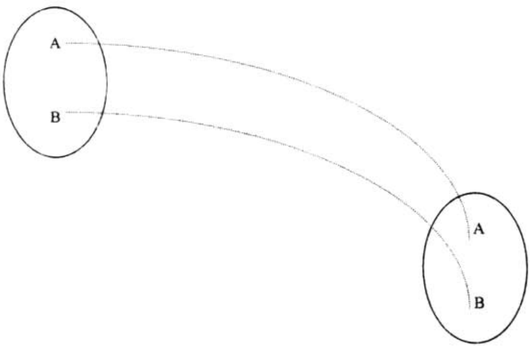
Un cuerpo rígido puede llevar a cabo tres tipos de movimiento en un plano, a saber: traslación, rotación con respecto a un eje fijo y el movimiento general en un plano, que consiste en la combinación de los dos primeros.

El estudiar la cinemática de un cuerpo rígido, permitirá describir su movimiento y a través de las leyes de Newton se podrá relacionarlo con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

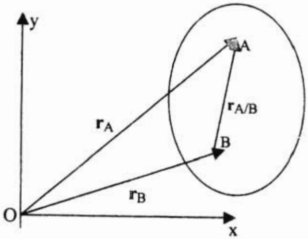
II. Traslación

Un cuerpo realiza un movimiento de traslación, si un segmento de recta que une dos puntos cualesquiera del cuerpo se mantiene paralelo a su posición original durante el movimiento.

Si la trayectoria de dos partículas cualquiera, como muestra la figura, son rectas equidistantes, el movimiento es una traslación rectilínea. Si las trayectorias son curvas paralelas, como se muestra a continuación, la traslación es curvilínea.



En el movimiento de traslación todos los puntos del cuerpo rígido tienen la misma velocidad y aceleración como se demuestra a continuación. La posición de dos puntos A y B, se puede expresar con respecto a un eje fijo sobre el piso



de la figura

$$\mathbf{r}_A=\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_{A/B} \qquad \text{IV.1}$$

donde $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ son vectores de posición de los puntos A y B, respectivamente, y $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector de posición del punto A con respecto al punto B. Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_A=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_{A/B})$$

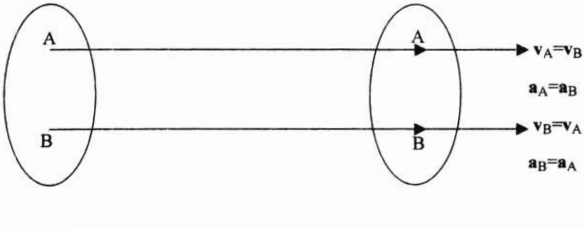
$$\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_B \qquad \text{IV.2}$$

$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_{A/B}=\mathbf{v}_{A/B}=0$, ya que $\mathbf{r}_{A/B}$ es constante pues el cuerpo es rígido y el movimiento es de traslación pura. De igual manera derivando la velocidad con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_A=\frac{d}{dt}\mathbf{v}_B$$

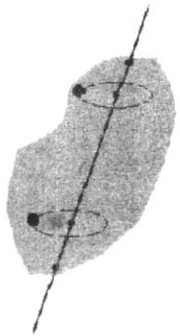
$$\mathbf{a}_A=\mathbf{a}_B \qquad \text{IV.3}$$

de esta manera *en un movimiento de traslación rectilínea o curvilínea, la velocidad y aceleración de todos los puntos de un cuerpo rígido son iguales.*

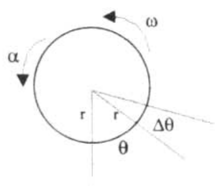


III. Rotación Respecto a un Eje Fijo

Un cuerpo rígido describe un movimiento de rotación en torno a un eje fijo, con posición y dirección fija, si cada punto del cuerpo sigue una trayectoria circular. Los centros de los círculos se encuentran sobre el eje de rotación.



Para estudiar el movimiento de rotación de un cuerpo, como se mencionó en la Unidad III conviene utilizar coordenadas polares (r,θ). Así el ángulo θ define la posición angular, $\Delta\theta$ el desplazamiento, $\omega=\frac{d}{dt}\theta$ la velocidad angular y $\alpha=\frac{d}{dt}\omega$ la aceleración angular.



Si la aceleración angular es constante se pueden aplicar las ecuaciones III.5, III.6 y III.7

$$\omega=\omega_0+\alpha t \qquad \text{(III.5)}$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{III.6}$$

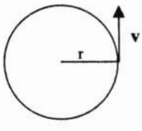
$$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta \tag{III.7}$$

Hay que destacar que *todos los puntos del cuerpo rígido tienen la misma velocidad y aceleración angulares en torno al eje fijo, con excepción de los puntos que se encuentran sobre el eje de giro cuya velocidad es cero.*

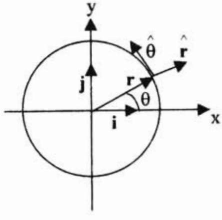
A continuación se establecerán las relaciones entre la velocidad y la aceleración lineales con la velocidad y aceleración angulares. En la unidad anterior también se dedujo la relación entre la magnitud de la velocidad lineal y la velocidad angular a través de la ecuación III.3

$$v=\omega r \tag{III.3}$$

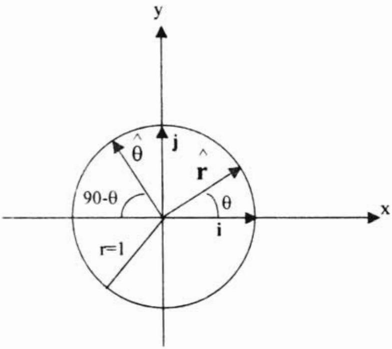
la cual es una relación entre las magnitudes de la velocidad angular ω y la velocidad lineal v cuya dirección es tangente a la circunferencia que describe cada partícula del cuerpo rígido.



Enseguida se deducirá la relación entre las aceleraciones lineal **a** y angular α, lo cual se hará mediante el uso de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$, donde $\hat{\mathbf{r}}$ tiene la misma dirección del vector de posición **r** y $\hat{\theta}$ la dirección perpendicular a éste (tangente a la circunferencia), como se muestra a continuación



si trasladamos $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$ al origen de coordenadas y los circunscribimos en un círculo de radio uno, se tiene



los vectores unitario $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$ cuya magnitud es uno, son constantes en magnitud pero no en dirección, ya que giran de la misma manera como lo hace cada punto del cuerpo rígido y su relación con los vectores unitarios constantes (en magnitud y dirección) **i** y **j**, se puede derivar a partir de gráfica anterior

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{j} \qquad \text{IV.3}$$

$$\hat{\theta} = -\cos(90-\theta)\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}(90-\theta)\ \mathbf{j}$$

$$\cos(90-\theta) = \operatorname{sen}\theta \ \text{ y } \ \operatorname{sen}(90-\theta) = \cos\theta$$

$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j} \qquad \text{IV.3}$$

Los vectores unitarios se utilizan para expresar la dirección de un vector o de sus componentes, es por eso que los vectores unitarios **i** y **j** se usan para expresar que las componentes de un vector están en la dirección x o y, respectivamente. Con ese mismo propósito se hará uso de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$, para expresar que un vector o sus componentes tiene la dirección radial ($\hat{\mathbf{r}}$) o tangencial ($\hat{\theta}$).

Mediante los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$ y su relación con los vectores unitarios **i**, **j** a través de las ecuaciones IV.3, se demostrará ahora que en un movimiento de rotación en torno a un eje fijo, la velocidad lineal de cualquier punto de un cuerpo es tangencial a la trayectoria. Por definición

$$\mathbf{v}=\frac{d}{dt}\mathbf{r}$$

pero $\mathbf{r}=r\hat{\mathbf{r}}$, siendo r la magnitud del vector de posición **r**, la cual es constante para un movimiento circular, por lo tanto

$$\mathbf{v}=\frac{d}{dt}r\hat{\mathbf{r}}=r\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}}=r\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\mathbf{i}+\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{j})=r(-\mathrm{sen}\theta\frac{d}{dt}\theta+\cos\theta\frac{d}{dt}\theta)$$

$$=r\frac{d}{dt}\theta(-\mathrm{sen}\theta+\cos\theta)=r\omega(-\mathrm{sen}\theta+\cos\theta)$$

de las ecuaciones IV.3, nótese que la cantidad entre paréntesis es igual a $\hat{\theta}$, entonces

$$v=r\omega\hat{\theta}=v\hat{\theta} \qquad \text{IV.4}$$

Para encontrar el vector aceleración para el movimiento circular, se derivará con respecto al tiempo **v** dada por la ecuación IV.4

$$\mathbf{a}=\frac{d}{dt}\mathbf{v}=\frac{d}{dt}v\hat{\theta}=v\frac{d}{dt}\hat{\theta}+\hat{\theta}\frac{d}{dt}v$$

a partir de la ecuación ecuación IV.3, se puede calcular $\frac{d}{dt}\hat{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta}=\frac{d}{dt}(-\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j})=-\cos\theta\frac{d}{dt}\theta\,\mathbf{i}-\mathrm{sen}\theta\frac{d}{dt}\theta\,\mathbf{j}$$

$$\text{pero } \frac{d}{dt}\theta=\omega$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta}=-\omega(\cos\theta\,\mathbf{i}+\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{j})=-\omega\hat{\mathbf{r}}$$

por lo tanto

$$\mathbf{a}=-v\omega\hat{\mathbf{r}}+(\frac{d}{dt}v)\hat{\theta}$$

de ecuación III.3, $v=\omega r$ y $\omega=\frac{v}{r}$

$$\mathbf{a}=-\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}+(\frac{d}{dt}v)\hat{\theta} \qquad \text{IV.5}$$

$$\mathbf{a}=-\omega^2 r\hat{\mathbf{r}}+\alpha r\hat{\theta} \qquad \text{IV.5}$$

ya que $v=\omega r$ y por lo tanto $\frac{d}{dt}v=r\frac{d}{dt}\omega=r\alpha$

De esta manera la aceleración en un movimiento circular tiene dos componentes, una en la dirección radial ($a_R=-\omega^2 r$) que apunta hacía al centro de la circunferencia en virtud del signo menos, y la otra en la dirección tangencial ($a_T=\alpha r$)

$$a_R=-\frac{v^2}{r}=-\omega^2 r \quad \text{y} \quad a_T=\frac{d}{dt}v=\alpha r \qquad \text{IV.6}$$

Ejemplo 1

Un disco gira, movido por un motor, con una aceleración angular de 4 rad/seg^2. Si parte del reposo, calcular:

a) El desplazamiento angular del radio del disco en t=2 s.
b) La velocidad angular del disco en el mismo tiempo.
c) Si el radio del disco es de 0.5 m. Calcular la velocidad lineal y la aceleración neta de un punto de la periferia del disco y de un punto a 0.25 m de su centro, en t=2 s.
d) Si el motor se apaga en el momento que el disco tiene una velocidad angular de 10 rad/s y actúa una fuerza de fricción entre el eje de giro y el disco de forma tal que alcanza el reposo en t=1 minuto. Determinar la aceleración angular y el ángulo descrito durante el tiempo de frenado.

Solución:

a) De ecuación II.6

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \text{(III.6)}$$

pero $\alpha=4$ rad/s; $\omega_0=0$; t=2 s y supóngase $\theta_0=0$

$$\theta=\frac{1}{2}(4)(2)^2=8 \text{ rad}$$

b) De ecuación III.5

$$\omega(2)=\omega_0+\alpha t=4(2)=8 \text{ rad/s}$$

c) De la relación entre las magnitudes de la velocidad tangencial y angular se obtiene para un punto sobre la periferia del disco con r=0.5m

$$v(t)=\omega(t)r$$

$$v(2)=\omega(2)r=8*0.5=4 \text{ m/s}$$

y para las componentes radial y tangencial de la aceleración a partir de las relaciones IV.6

$$a_R=-\frac{v^2}{r} \quad y \quad a_T=\alpha r$$

$$a_R=-\frac{4^2}{0.5}=-32 \text{ m/s}^2$$

$$a_T=4*0.5=2 \text{ m/s}^2$$

la magnitud de la aceleración neta a_n

$$a_n=\sqrt{{a_T}^2+{a_R}^2}=\sqrt{32^2+2^2}=32.06 \text{ m/s}^2$$

y la dirección

$$\theta=\tan^{-1}a_R/a_T=\tan^{-1}2/32=3.43°$$

para r=0.25

$$v(2)=8*0.25=2 \text{ m/s}$$

$$a_R=-\frac{4^2}{0.25}=-64 \text{ m/s}^2$$

$$a_T=4*0.25=1 \text{ m/s}^2$$

$$a_n=\sqrt{64^2+1^2}=64 \text{ m/s}^2$$

$$\theta=\tan^{-1}1/64=1.14°$$

d) De ecuación III.5

$$\omega=\omega_0+\alpha t$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

en éste caso ω_0=10 rad/s; ω=0; θ_0=0 y t=60 seg

$$\alpha = \frac{0-10}{60} = -0.17 \text{ rad/s}^2$$

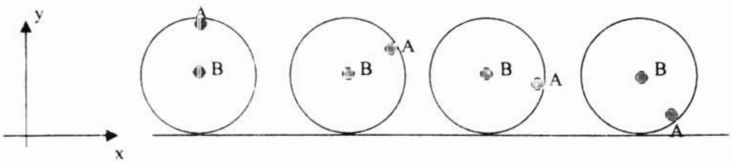
de ecuación III.7

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{0-100}{-2 * 0.17} = 294.12 \text{ rad} = 46.81 \text{ vueltas}$$

IV. Movimiento General en un Plano

El movimiento general en un plano equivale a un movimiento de traslación y uno de rotación que se llevan a cabo simultáneamente, como es el caso de una esfera que rueda, como se muestra en la siguiente figura, en la cual mientras el punto B se mueve hacia la derecha el punto A gira en torno a él.



De acuerdo a la ecuación IV.1

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$$

si ahora derivamos con respecto al tiempo, se obtiene

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad \text{IV.7}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + v\,\hat{\theta} = \mathbf{v}_B + \omega r\,\hat{\theta} \qquad \text{IV.7}$$

Esta ultima ecuación expresa el hecho que el punto A además de realizar un movimiento de translación con igual velocidad que el punto B, gira en torno a B.

La velocidad de cualquier punto A del cuerpo es igual a la velocidad del punto B, escogido como referencia, más la velocidad de A respecto a B. En este caso $\mathbf{v}_{A/B}$ no es cero como en el movimiento de traslación, ya que A gira en torno a B. Esto esta en congruencia con el teorema de Chasles que se presenta a continuación.

Teorema de Chasles: Cualquier movimiento en un plano se puede expresar como la superposición de dos movimientos; un movimiento de traslación con velocidad $\mathbf{v}_B$, donde B es un punto cualquiera del cuerpo, y un movimiento de rotación en torno a un eje de dirección fija que pasa por B, que es perpendicular al plano xy, y que se realiza con velocidad angular ω, independientemente del punto B que se seleccione como referencia.

Si derivamos con respecto al tiempo la ecuación IV.7, se obtiene la relación entre las aceleraciones de A y B

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_A=\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_B+\mathbf{v}_{A/B})$$

$$\mathbf{a}_A=\mathbf{a}_B+\mathbf{a}_{A/B} \qquad \text{IV.8}$$

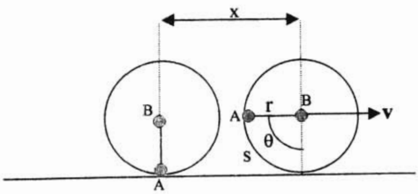
como A realiza un movimiento de rotación alrededor de B, la aceleración a A/B corresponde a la de un movimiento de rotación. Así esta ecuación se puede expresar como

$$\mathbf{a}_A=\mathbf{a}_B-\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}}+\alpha r\,\hat{\theta} \qquad \text{IV.9}$$

tomando en consideración la ecuación IV.5.

Movimiento de un Cuerpo que Rueda sin Resbalar

Sea el disco de radio r que muestra la figura, el cual rueda sin resbalar con una aceleración angular constante α y una velocidad angular ω en un instante dado t.



Para todo cuerpo que rueda sin resbalar, siempre se cumple que el desplazamiento (x) en un tiempo t del centro de masa del cuerpo, en este caso el punto B (o el cuerpo en conjunto), es igual al arco de la circunferencia que toca el piso durante ese tiempo, esto es

$$x=s$$

pero como θ se mide en radianes

$$s=\theta r$$

$$x(t)=\theta(t)r \qquad \text{IV.10}$$

si se derivan ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo

$$v(t)=\omega(t)r \qquad \text{IV.11}$$

derivando nuevamente con respecto al tiempo

$$a=\alpha r \qquad \text{IV.12}$$

Así, las ecuaciones

$$x(t)=\theta(t)r \qquad \text{IV.10}$$

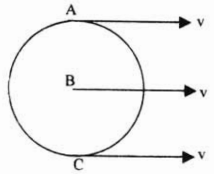
$$v(t)=\omega(t)r \qquad \text{IV.11}$$

$$a=\alpha r \qquad \text{IV.12}$$

relacionan el desplazamiento x, la velocidad v y la aceleración a, del movimiento de traslación de un cuerpo rígido que rueda sin resbalar, con las cantidades angulares θ, ω y α. *Estas ecuaciones sólo se cumplen si el cuerpo rueda sin resbalar*.

A continuación se estudia con más detalle el movimiento de un cuerpo que rueda sin resbalar. Esto se hará mediante la determinación de la velocidad de tres puntos diferentes (A,B y C) de un disco que se mueve sobre una superficie horizontal. Primeramente se considera el movimiento de traslación sin rotación, a continuación el movimiento de rotación sin traslación y finalmente el rodamiento sin resbalar mediante la combinación de dos movimientos simultáneos, el de traslación del centro de masa y el de rotación alrededor del mismo.

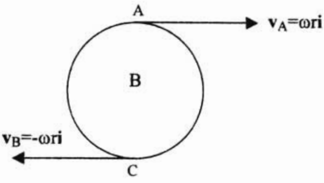
a) Traslación sin rotación



Para un movimiento de traslación pura, de la ecuación IV.1 se sabe que las velocidades de todos los puntos del cuerpo rígido deben ser iguales, por lo tanto

$$\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_B=\mathbf{v}_C$$

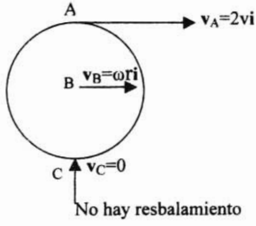
a) Rotación sin traslación



En este caso el disco tiene un movimiento de rotación pura alrededor del centro de masa, el cual se encuentra en reposo. Este implica que todos los puntos del disco giran alrededor del centro de masa con velocidad angular ω. Por lo que

$$\mathbf{v}_A=\omega r\mathbf{i}; \qquad \mathbf{v}_B=0; \qquad \mathbf{v}_C=-\omega r\mathbf{i}$$

c) Traslación con rotación (rodamiento sin resbalar)



En este caso el centro de masa se mueve con una velocidad $v=\omega r$ y simultáneamente los puntos A y C se mueven con la misma velocidad de traslación y giran en torno a él con velocidad angular ω. De la ecuación IV 7.

$$\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_B+\mathbf{v}_{A/B}$$

pero

$$\mathbf{v}_B=v\mathbf{i}=\omega r\mathbf{i}; \qquad y \qquad \mathbf{v}_{A/B}=\omega r\mathbf{i}$$

en ésta última ecuación $\mathbf{v}_B$ es la velocidad de traslación del centro de masa B y $\mathbf{v}_{A/B}$ es la velocidad tangencial de A en su movimiento de giro con respecto al centro de masa, así

$$\mathbf{v}_A=\omega r\mathbf{i}+\omega r\mathbf{i}=2\omega r\mathbf{i}=2v\mathbf{i}$$

y

$$\mathbf{v}_C=\mathbf{v}_B+\mathbf{v}_{C/B}$$

siendo $\mathbf{v}_{C/B}=-\omega r\mathbf{i}$ la velocidad tangencial del punto C con respecto al punto B; es negativa porque se mueve hacia la izquierda

$$\mathbf{v}_C=\omega r\mathbf{i}-\omega r\mathbf{i}=0$$

UNIDAD IV

AUTOEVALUACIÓN

Preguntas

1. ¿Qué tipos de movimiento puede realizar un sólido en un plano?

2. Definir los movimientos de traslación, rotación y general en un plano.

3. ¿Qué condición deben cumplir la velocidad y aceleración de todos los puntos de un cuerpo rígido en un movimiento de traslación.

4. ¿En un movimiento circular como está relacionado arco s y θ, v y ω?. ¿En qué unidades deben medirse θ y ω para que se cumplan esas relaciones?

5. ¿Qué dirección tiene el vector velocidad en un movimiento circular?

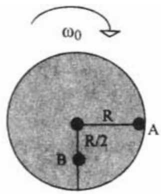
6. En un movimiento circular, ¿cuáles son las componentes de la aceleración?

7. En el Movimiento General en un Plano, ¿cómo están relacionados los vectores velocidad de dos puntos de un cuerpo rígido? ¿Y los vectores aceleración?

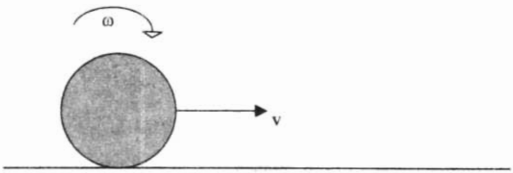
8. ¿Cuál es la relación entre la velocidad de traslación y la velocidad angular para un cuerpo que rueda sin resbalar? ¿Y entre la aceleración de traslación y la aceleración angular?

Problemas

1. Un disco de radio 1 m gira con ω_0=7 rad/s y está sujeto a una aceleración angular constante α=3 rad/s^2. Calcular la velocidad tangencial y las componentes tangencial y radial de la aceleración en t=5 s, para los puntos A y B que muestra la figura.



2. Un disco de radio 2 m, rueda sin resbalar y tiene una aceleración angular constante de 3 rad/s^2. Calcular la distancia recorrida por el disco, su velocidad y aceleración de traslación en t=2 s. Suponer que su velocidad angular inicial es cero.



UNIDAD V

DINÁMICA DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO

I. Introducción

Esta unidad conjuntamente con la unidad VI, constituyen la parte medular del curso, el contenido de las unidades anteriores se ha concebido de forma tal que proporcione al alumno los conocimientos requeridos para poder cubrir ambas unidades.

En la unidad IV se estudio la cinemática de los tres movimientos de un cuerpo rígido en un plano y se establecieron las relaciones entre las cantidades angulares θ, ω y α con las correspondientes cantidades lineales x, v y a. En ésta unidad se estudiará la dependencia del movimiento de un cuerpo rígido con las fuerzas que actúan sobre él y sus puntos de aplicación, y con la masa y la forma como está distribuida.

Las ecuaciones para el movimiento del cuerpo rígido se establecerán para cada uno de los movimientos. El movimiento de traslación se hará a partir del centro de masa como se hizo en las unidades I y II, el de rotación mediante el movimiento circular visto en las unidades III y IV, y el movimiento general en un plano por medio de la superposición del movimiento de traslación del centro de masa y el movimiento de rotación alrededor de éste.

En esta unidad se dará especial atención al desarrollo de las habilidades en el estudiante, que le permitan resolver diferentes tipos problemas del movimiento de un cuerpo rígido en un plano.

II. Momento de Inercia

En la unidad III se definió el momento angular para una partícula como:

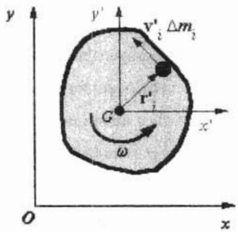
$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \text{(III.8)}$$

se demostró en el ejemplo 2 de esa unidad que para una partícula está ecuación puede transformarse en

$$\ell = I\omega$$

sin embargo, esta expresión es válida también para un cuerpo rígido como se demostrará a continuación.

Sea un cuerpo rígido que gira en torno a un eje que pasa por el centro de masa G, como muestra la figura



El momento angular ℓ de la partícula i de masa Δmi, con respecto al centro de masa G es

$$\ell = \mathbf{r}'_i \times \Delta m_i \, \mathbf{v}_i = \Delta m_i \, (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i) = r'_i \Delta m_i \, v_i \ \mathbf{k}'$$

$$\text{pero } v_i = \omega r'_i$$

$$\ell = \Delta m_i r'^2_i \omega \mathbf{k}'$$

si se considera el momento angular de esta partícula como la diferencial del momento angular del cuerpo rígido (dL) se tiene que

$$d\mathbf{L} = dm r'^2 \omega \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{L} = \int dm r'^2 \omega \mathbf{k}' = \omega \mathbf{k}' \int r'^2 dm = I \, \omega \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{L} = I\omega \qquad \text{V.1}$$

Donde *I es el momento de inercia respecto al centro de masa*, dado por

$$I = \int r'^2 dm \qquad \text{V.2}$$

y ω es la velocidad angular del cuerpo rígido.

El cálculo de momentos de inercia es un ejercicio de cálculo integral, que se sale de los alcances de éste curso. Aquí sólo se mencionará que para su determinación se hace uso del concepto de densidad de masa definida como

$$\rho = \frac{d}{dv}\mathrm{m}$$

$$\mathrm{dm} = \rho\,\mathrm{dv}$$

así el momento de inercia queda como

$$\mathrm{I} = \int r'^2 \rho\,\mathrm{dv}$$

para el caso de una distribución volumétrica de masa. Si se tiene una distribución superficial (σ) o lineal (λ) de masa , entonces I está dado por:

$$\mathrm{I} = \int r'^2 \sigma \mathrm{ds}$$

siendo ds=diferencial de área

$$\mathrm{I} = \int r'^2 \lambda \mathrm{dx}$$

I ha sido determinado para muchos cuerpos y la expresión de éste para los objetos de formas más familiares aparece en cualquier libro estándar de Dinámica. Si se desea estudiar la forma como se calcula el momento de inercia se sugieren que se consulte el apendice III-A del libro recomendado en las referencias: Elementos de Dinámica, por Hugo Sergio Becerril Hernández, Nicolás Falcón Hernández y Abelardo Luis Rodríguez Soria, publicado por la UAM-Azcapotzalco.

Teorema de los Ejes Paralelos

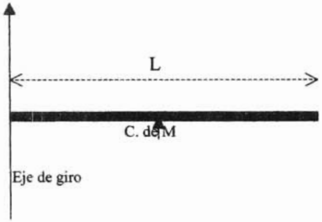
La ecuación V.1 define el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa, pero en ocasiones se requiere su valor con respecto a un eje que no pasa por el centro de masa. En este caso se utiliza el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia de un cuerpo que gira respecto a un eje que no pasa por el centro de masa, pero que es paralelo al que pasa por él y está desplazado respecto al mismo una distancia D. La relación entre los momentos de inercia calculados respecto a dichos ejes paralelos es:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_{c.m} + \mathrm{mD}^2$$

donde I es el momento de inercia respecto al eje que no pasa por el centro de masa, $\mathrm{I}_{c.m}$ el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa, m la masa del cuerpo y D la distancia entre ambos ejes.

Ejemplo 1

Calcular el momento de inercia de una barra de longitud L con respecto a un eje que pasa uno de sus extremos, como muestra la figura.



De acuerdo al teorema de los ejes paralelos

$$I=I_{c.m}+mD^2$$

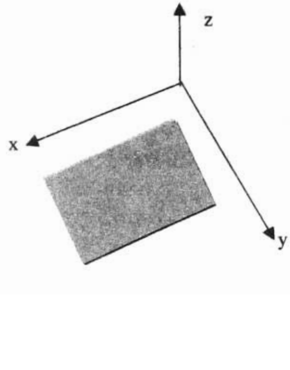
donde $I_{c.m}=\frac{1}{12}mL^2$ y $D=\frac{L}{2}$

$$I=\frac{1}{12}mL^2+m\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{12}mL^2+\frac{1}{4}mL^2=\frac{1}{3}mL^2$$

Teorema de los Ejes Perpendiculares

Sea una lámina plana situada en el plano XY como muestra la figura, y sean Ix, Iy e Iz los momentos de inercia de la lámina con respecto a los ejes coordenados. Entonces se cumple la relación:

$$I_z=I_x,+I_y$$



Dicho teorema solamente es válido para láminas planas con un espesor (dimensión z) mucho menor que el ancho (dimensión y) y el largo (dimensión x).

Radio de Giro

Otra manera mediante la cual se puede expresar el momento de inercia de un cuerpo es a través del radio de giro k, el cual está definido para todo cuerpo independiente de su forma como:

$$I=mk^2$$

siendo I el momento de inercia, m la masa y k el radio de giro.

III. Ecuaciones de Movimiento

1. Movimiento de Traslación

Este movimiento también se le conoce como Traslación Pura, y se estudia tomando en consideración lo visto en las unidades I, II y IV, esto es:

a) Todos los puntos del cuerpo rígido tienen la misma velocidad y aceleración.
b) Las ecuaciones de movimiento para calcular la aceleración del cuerpo rígido son:

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext}=m\mathbf{a}$$

$$\Sigma \tau_{ext}=0$$

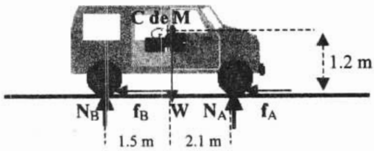
Esta última ecuación corresponde a la ecuación del equilibrio de rotación, se cumple por que no hay movimiento de rotación por lo cual la suma de torcas externas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero

c) La primera ecuación se cumple al aplicarla al centro de masa, lo cual facilita su aplicación.

Ejemplo 1.El vehículo de masa 1200 kg que muestra la figura, se mueve a 60 km/hr y el conductor tiene que frenar súbitamente, observándose que derrapa 19 m hasta detenerse. Calcular:

a) La aceleración producida por el frenado, suponiéndola constante.
b) El coeficiente de fricción entre las llantas y el piso.

c) La fuerza normal que actúa en cada llanta.



El procedimiento que se recomienda seguir para resolver éste tipo de problemas es el siguiente:

(i) Elaborar el diagrama de cuerpo libre.

(ii) Aplicar la segunda ley de Newton en sus componentes x, y.

(iii) Aplicar la ecuación del equilibrio de rotación.

(iv) Resolver el sistema de ecuaciones simultaneas resultante.

Solución:

a) La aceleración se puede obtener directamente de los datos y haciendo uso de la ecuación para el movimiento con aceleración constante

$$v^2=v_0^2+2ax$$

$v=0$ $\quad$ $v_0=60\ km/hr=60/3.6\ m/s=16.67\ m/s$ $\quad$ $x=19\ m$

$$0=(16.67)^2+2(19)a$$

$$a=-7.31\ m/s^2$$

b) Del diagrama de cuerpo libre que aparece en la figura anterior

$$\Sigma F_x=ma$$

$$-(f_A+f_B)=ma \qquad f_A=\mu N_A;\ f_B=\mu N_B$$

$$-\mu(N_A+N_B)=ma$$

$$\Sigma Fy=0$$

$$N_A+N_B-mg=0 \qquad N_A+N_B=mg$$

$$-\mu mg=ma \quad \mu=-a/g=-(-7.31)/9.8=0.75$$

c) De la ecuación para el equilibrio de rotación

$$\Sigma\tau_{ext}=0$$

calculando las torcas respecto al centro de masa

$$2.1N_A-1.2(f_A+f_B)-1.5N_B=0$$

$$2.1N_A-1.2(.75N_A+.75N_B)-1.5N_B=0$$

$$1.2N_A+2.4N_B=0 \quad N_A=2N_B$$

sustituyendo NA en $N_A+N_B=mg$

$$2N_B+N_B=mg$$

$$N_B=mg/3=1200(9.8)/3=3920 \text{ N}$$

$$N_A=2N_B=2(3920)=7480 \text{ N}$$

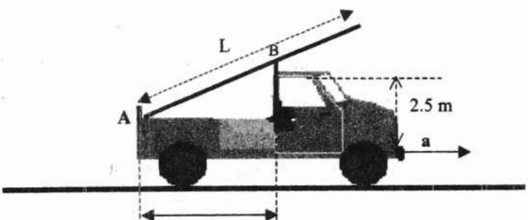
N_A y N_B representan la reacción en las dos llantas delanteras y traseras, respectivamente, entonces la reacción en cada llanta es

$$N_{\text{Llanta delantera}}=N_A/2=3920 \text{ N}$$

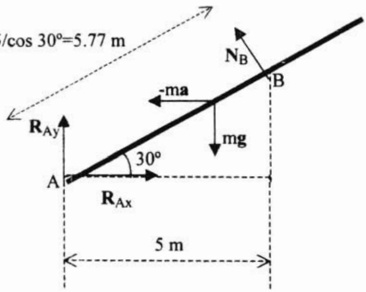
$$N_{\text{Llanta trasera}}=N_B/2=1960 \text{ N}$$

Ejemplo 2

En tablón de masa m y longitud L, se encuentra sobre un camión como muestra la figura, de tal modo que el extremo A descansa en el tope y el B en una tarima vertical. Determinar la máxima aceleración del camión sin que el tablón gire. Despreciar las fuerzas de fricción.



De acuerdo al procedimiento sugerido anteriormente, lo primero que hay que hacer es el diagrama de cuerpo libre del tablón



Las fuerzas $\mathbf{R}_{Ay}$ y $\mathbf{R}_{Ax}$ son las reacciones del piso del camión y el tope, $\mathbf{N}_B$ es la reacción de la tarima vertical, **mg** es el peso y -**ma** es la fuerza que actúa sobre el tablón al moverse el camión hacia la derecha con una aceleración **a**. Como el cuerpo se encuentra en equilibrio de rotación ya que no se desea que gire, entonces se debe cumplir que la suma de torcas debe ser cero

$$\Sigma\tau=0$$

las torcas se calcularán respecto al punto A

$$\tau_{NA}=5.77N_B$$

$$\tau_{ma}=ma(L/2)\text{sen } 30^\circ$$

$$\tau_{mg}=-mg(L/2)\text{sen } 60^\circ$$

$$5.77N_B+ma(L/2)\text{sen } 30^\circ-mg(L/2)\text{sen } 60^\circ=0$$

pero se desea que la aceleración sea máxima, lo cual se da en el momento que el tablón se despega de la tarima vertical haciendo con ello $N_B=0$, con este hecho esta ecuación queda como

$$ma_{max(}L/2)\text{sen } 30^\circ-mg(L/2)\text{sen } 60^\circ=0$$

$$a_{max}=g\text{sen}60^\circ/\text{sen}30^\circ=1.73 \text{ m/s}^2$$

2. Movimiento de Rotación

Este movimiento también se le conoce como Rotación Pura, y se estudia tomando en consideración lo visto en las unidades I, II y IV, esto es:

a) Todos los puntos del cuerpo rígido tienen la misma velocidad y aceleración angulares.

b) Las ecuaciones de movimiento para calcular la aceleración del cuerpo rígido son:

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext}=0$$

$$\Sigma \tau_{ext}=I\alpha$$

donde I es el momento de inercia calculado respecto al eje de rotación.

c) Hay problemas que será necesario tomar en consideración las relaciones cinemáticas entre las variables angulares y las lineales.

El procedimiento que se recomienda seguir para resolver problemas de movimiento de rotación de cuerpos rígidos es el siguiente:

(i) Elaborar el diagrama de cuerpo libre.

(ii) Seleccionar los ejes y el sentido positivo de rotación.

(iii) Aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de traslación en sus componentes x, y. Si el movimiento es de rotación pura $\mathbf{a}=(a_x, a_y)=0$

$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0....$$

a partir de estas relaciones se podrán obtener ecuaciones que relacionan las fuerzas.

(iv) Aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de rotación

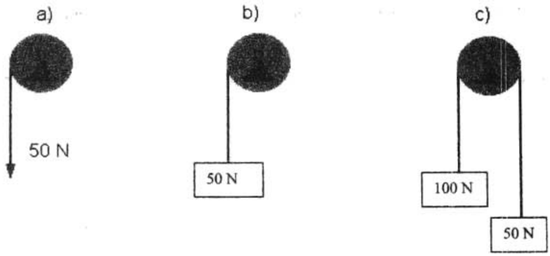
$$\Sigma \tau_{ext}=I\alpha$$

(v) Establecer las relaciones cinemáticas si se requieren.

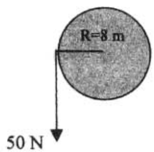
(vi) Resolver el sistema de ecuaciones simultaneas resultante.

Ejemplo 3

Se tienen tres poleas idénticas que muestra la figura. Calcular para cada inciso la aceleración angular para cada polea. Suponer que el radio de cada polea es de 80 cm y su masa de 10 kg.



a) Este caso es una rotación pura y el diagrama de cuerpo libre es



aplicando la 2ª ley de Newton para la rotación

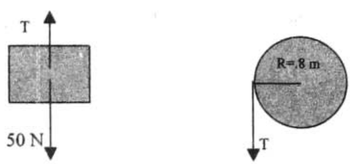
$$\tau_{ext}=I\alpha$$

$$50R=I\alpha$$

$$I=\frac{1}{2}MR^2=0.5(10)(0.8)^2=3.2 \text{ kg m}^2$$

$$\alpha=50R\frac{1}{I}=50*0.8/3.2=12.5 \text{ rad/s}^2$$

b) Este caso es una rotación pura de la polea combinada con una traslación pura del bloque. El diagrama de cuerpo libre de ambos cuerpos es



Para la traslación se toma el sentido positivo hacia abajo, para evitar tener que considerar un signo menos entre la aceleración a del bloque y aceleración angular de la polea

Para el movimiento de traslación

$$F_n=ma$$

$$50\text{-}T=ma \qquad (1)$$

Para el movimiento de rotación

$$\tau_{ext}=I\alpha$$

$$TR=I\alpha \qquad (2)$$

Se requiere de una ecuación más pues se tienen tres incógnitas T, a y α. Esta se obtiene de la relación cinemática entre la aceleración tangencial de los puntos de la periferia de la polea y la aceleración del bloque, ya que ambas son iguales

$$a=a_T=\alpha R \qquad (3)$$

Despejando de ecuación (1) T y sustituyéndola en la ecuación (2)

$$T=50\text{-}ma$$

$$R(50\text{-}ma)=I\alpha \qquad (4)$$

sustituyendo a de ecuación (3) en (4)

$$50R\text{-}m\alpha R^2=I\alpha$$

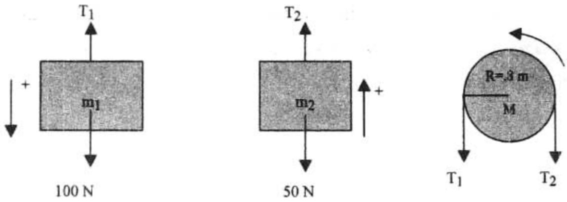
$$\alpha=\frac{50*R}{I+mR^2}$$

$$I=\frac{1}{2}MR^2=3.2\ kgm^2$$

$$m=\frac{50}{9.8}=5.1\ kg$$

$$\alpha=\frac{50*0.8}{3.2+5.1*0.8^2}=6.19\ rad/s^2$$

c) Este caso corresponde a un movimiento de rotación pura para la polea y movimientos de traslación pura para ambos bloques. El diagrama de cuerpo libre de los tres cuerpos es



del diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo y fijando el sentido positivo que se indica para el movimiento de cada uno, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$F_n=ma$$

para el movimiento de traslación de m_1

$$100-T_1=m_1a_1 \qquad (1)$$

para el movimiento de traslación de m_2

$$T_2-50=m_2a_2 \qquad (2)$$

$$\tau_n=I\alpha$$

para el movimiento de rotación de la polea

$$T_1r-T_2r=I\alpha \qquad (3)$$

que es un sistema de tres ecuaciones simultáneas con cinco incógnitas a_1, a_2, T_1, T_2 y α . De la relación cinemática entre a_1 y a_2 con α, se obtienen dos ecuaciones más, ya que nuevamente la aceleración tangencial de los puntos de la periferia de la polea es igual a la aceleración de los bloques

$$a_1=\alpha r \qquad (4)$$

$$a_2=\alpha r \qquad (5)$$

sustituyendo a_1 y a_2 de ecuaciones (4) y (5) en ecuaciones (1) y (2) y despejando T

$$100-T_1=m_1\ \alpha r$$

$$T_1=100-m_1\alpha r$$

$$T_2-50=m_2\alpha r$$

$$T_2=50+m_2\alpha r$$

Sustituyendo T_1 y T_2 en ecuación (3)

$$[(100-m_1\alpha r)-(50+m_2\alpha r)]r=I\alpha$$

$$\alpha(I+m_1r+m_2r)=50$$

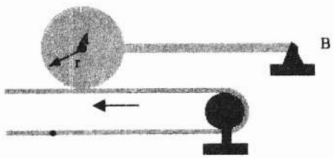
$$\alpha = \frac{50}{I + m_1r + m_2r}$$

sustituyendo datos I=3.2 kg,; $m_1 = \frac{100}{9.8} = 10.2\ \text{kg}; m_2 = \frac{50}{9.8} = 5.1\ \text{kg}$

$$\alpha = \frac{50}{3.2 + 10 * 0.8 + 5.1 * 0.8} = 3.27\ \text{rad/s}^2$$

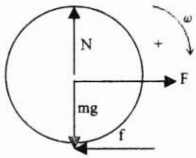
Ejemplo 4

El disco uniforme A, de masa 4 kg. Está en reposo cuando se pone en contacto con una banda transportadora, que se mueve a velocidad constante de 2 m/s. Suponiendo que el eslabón AB tiene un peso despreciable y sabiendo que el radio del disco es de 750 mm y el coeficiente de fricción con la banda es de 0.4 calcular la aceleración regular del disco.



Solución

Este es un movimiento de rotación pura del disco y su diagrama de cuerpo libre es



Tomando el sentido positivo que se indica en la figura para la rotación y para las torcas, las ecuaciones de movimiento son:

Para el movimiento de traslación

$$\sum F_x = ma_x$$

pero $a_x = 0$

$$\sum F_x = 0$$

$$F - f = 0 \qquad F = f$$

$$\sum F_y = 0 \qquad N = mg$$

$$N = 4 * 9.8 = 39.2$$

pero la fuerza de fricción está dada por

$$f = \mu N = 0.4 * 39.2 = 1568 \text{ N}$$

Para el movimiento de rotación

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha$$

La única torca externa que actúa es la de la fricción

$$fr = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{fr}{I}$$

pero $I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(4)(0.75)^2 = 1.13 \text{ kgm}^2$

$$\alpha = \frac{15.68 * 0.75}{1.13} = 10.41 \text{ rad/s}^2$$

3. Movimiento General en un Plano

Como se definió en la Unidad IV, este es un movimiento compuesto de un movimiento de traslación y uno de rotación, que un mismo cuerpo realiza simultáneamente. La forma como se resuelve un problema de un movimiento de este tipo, es considerando dos movimientos, a saber

- Un movimiento de traslación del centro de masa, descrito por la ecuación:

  $$\mathbf{F}_{ext}=M\mathbf{A}$$

  donde A es la aceleración del centro de masa

- Un movimiento de rotación alrededor del centro de masa, descrito por la ecuación:

  $$\tau'=I'\,\alpha'$$

  donde τ', I' y α', se miden respecto al sistema de referencia fijo en el centro de masa.

Existen otros puntos con respecto a los cuales se pueden plantear las ecuaciones de movimiento, sin embargo el centro de masa presenta una serie de ventajas, que por lo general facilitan su aplicación como punto de referencia.

Solución de Problemas

Para resolver un problema de un movimiento general de cuerpo rígido en un plano, se recomienda seguir el siguiente procedimiento

(i) elaborar el diagrama de cuerpo libre.

(ii) Seleccionar los ejes (x, y) y el sentido positivo de rotación.

(iii) Aplicar la 2ª ley de Newton al movimiento de traslación en componentes (x, y).

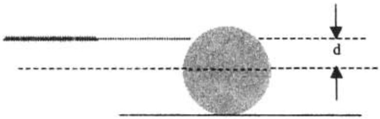
(iv) Aplicar la 2ª ley de Newton al movimiento de rotación.

(v) Establecer las relaciones cinématicas.

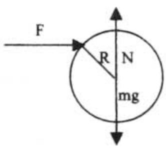
(vi) Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resultantes

Ejemplo 5

Un jugador de billar desea golpear una bola con el taco de forma tal que empiece inmediatamente a rodar sin resbalar. Calcular la distancia d que muestra la figura, para que esto suceda. Expresar el resultado para d en términos de R, el radio de la bola de billar



El diagrama del cuerpo libre de la esfera en el momento que el taco la golpea, antes de que empiece a moverse, ya que se desea que al iniciar su movimiento lo haga rodando sin resbalar, por lo cual no se considera la fuerza de fricción



Cuando el taco golpea la bola, le aplica una fuerza F durante un tiempo t, ambos F y t son desconocidos. Aplicando la 2ª ley de Newton en la dirección x

$$F_x = ma$$

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m}$$

Si se considera F constante la aceleración también lo es por lo que la velocidad final al dejar de actuar F es

$$v=v_0+at$$

pero $v_0=0$

$$v=\frac{F}{m}t$$

Esta es la velocidad del centro de masa en t. Si ahora se aplica la 2ª ley de Newton al movimiento de rotación alrededor del centro de masa

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$Fd = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{Fd}{I}$$

como $\omega_0=0$ y α es constate, se puede obtener ω de la siguiente manera

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{Fd}{I}t$$

igualando

$$v=\omega R$$

que es la condición para que la bola de billar ruede sin resbalar, de donde:

$$\frac{Ft}{m} = \frac{Fd}{I}tR$$

eliminando F y t de ambos miembros de la ecuación y substituyendo $I = \frac{2}{5}mR^2$

$$\frac{1}{m} = \frac{dR}{\frac{2}{5}mR}$$

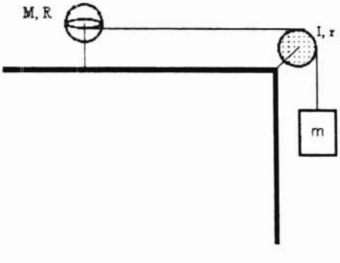
finalmente

$$d = \frac{2}{5}R = 0.4\ R$$

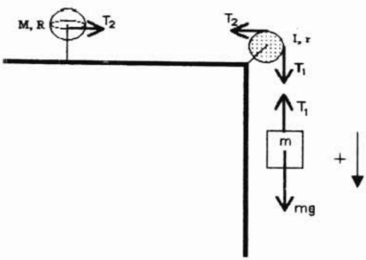
Así que, para que la bola de billar ruede sin resbalar inmediatamente después de haber sido golpeada por el taco, se le debe pegar a una altura un poco menor que la mitad del radio, sobre una línea horizontal imaginaria paralela a la horizontal que pasa por el centro de masa.

Ejemplo 6

El sistema que muestra la siguiente figura está compuesto de: el bloque de masa m, la polea de momento de inercia I y radio r, y un cascarón esférico montado de forma tal que puede rotar alrededor de su eje vertical. El cascarón esférico tiene una masa M y un radio r. La cuerda de masa despreciable está enrollada alrededor de la parte media del cascarón y cuando el bloque cae la esfera y la polea giran. Suponiendo que la velocidad inicial del bloque es cero, calcular su velocidad cuando ha bajado una distancia h, respecto a su posición inicial.



El diagrama de cuerpo rígido del sistema es



Aplicando la 2ª ley de Newton al bloque y suponiendo el sentido positivo hacia abajo como muestra la figura

$$\Sigma F = ma_b$$

$$mg - T_1 = ma_b \qquad (1)$$

y a la polea y el cascarón

$$\Sigma\tau = I\alpha$$

para la polea

$$T_1 r - T_2 r = I_{pol}\alpha_{pol} \qquad (2)$$

Nótese que en éste caso para la polea, T_1 no es igual a T_2, como sea había considerado en cursos anteriores cuando se suponía que la polea no tenía masa. Para el cascarón esférico

$$T_2 R = I_{casc}\alpha_{casc}$$

$$I_{casc} = \frac{2}{3}MR^2$$

$$T_2R=\frac{2}{3}MR^2\alpha_{casc} \qquad (3)$$

Se tiene un sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas: T_1, T_2, a_b, α_{pol} y α_{casc} . de acuerdo al procedimiento planteado para resolver este tipo de problemas hacen falta las relaciones cinemáticas. Estas se obtienen notando que la aceleración tangencial (a_{Tpol}) de los puntos de la periferia de la polea es igual a la aceleración del bloque

$$a_{Tpol}=a_b$$

pero $a_{Tpol}=\alpha_{pol}r$, por lo tanto

$$a_b=\alpha_{pol}r \qquad (4)$$

Para el cascarón la aceleración tangencial de los puntos que se encuentra en donde está la cuerda, también es igual a la aceleración del bloque

$$a_b=\alpha_{casc}R \qquad (5)$$

despejando α de ambas ecuaciones

$$\alpha_{casc}=\frac{a_b}{R} \qquad y \qquad \alpha_{pol}=\frac{a_b}{r}$$

sustituyendo α en ecuaciones 2 y 3

$$mg-T_1=ma_b \qquad (1)$$

$$T_1r-T_2r=I\frac{a_b}{r} \qquad (2')$$

$$T_2R=\frac{2}{5}MRa_b \qquad (3')$$

Ahora se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (T_1, T_2 y a_b): Dividiendo ecuación (2') entre r y (3') entre R y sumando las tres ecuaciones resultantes, se obtiene

$$mg-T_1=ma_b$$

$$T_1-T_2=I\frac{a_b}{r^2}$$

sumando miembro a miembro estas dos ecuaciones, se obtiene

$$mg-T_2=ma_b+I\frac{a_b}{r^2} \qquad (4')$$

despejando T_2 de ecuación 3'

$$T_2=\frac{2}{5}Ma_b \qquad (3')$$

sumando ahora estas dos ecuaciones (4') y (3'), se obtiene

$$mg=(m+\frac{I}{r^2}+\frac{2}{5}M)a_b$$

$$a_b=\frac{mg}{(m+\frac{I}{r^2}+\frac{2}{5}M)}$$

como la aceleración es constante, para calcular la velocidad del bloque al bajar una distancia h, se puede utilizar la ecuación

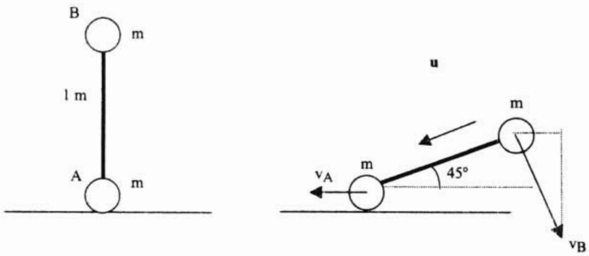
$$v^2=v_0^2+2a_bh$$

pero $v_0=0$

$$v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{I}{r^2}+\frac{2}{5}M}}$$

Ejemplo 7. Movimiento de Mancuernas

Se tiene una mancuerna compuesta de dos partículas A y B, y una varilla de peso despreciable y longitud 1 m, como muestra la figura de la izquierda. La mancuerna se encuentra inicialmente en reposo en su posición vertical, con la partícula A descansando sobre el piso sin fricción. Se da al sistema un pequeño desplazamiento angular y cae. Calcular la velocidad de A cuando la varilla forma 45° con la horizontal, como muestra la figura de la derecha



Sean $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ las velocidades de A y B, como se indica en la figura. Se pueden obtener las ecuaciones para las velocidades a partir de las siguientes consideraciones:

a) Se conserva la componente x del momento lineal al no haber fuerzas externas actuando en esa dirección,

$$mv_{Bx} - mv_A = 0$$

de donde se concluye que

$$v_{Bx} = v_A$$

b) Se conserva la energía mecánica del sistema, ya que no actúan fuerzas de fricción.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(1\text{sen } 45°) = mg1$$

c) La componente de v_A y v_B a lo largo de la varilla es la misma, esto es:

$$v_{Bu}=v_A\cos 45°$$

pero $v_{Bu}=\mathbf{v}_B \bullet \mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u}=(-\cos 45°, -\text{sen } 45°)$ y $v_B=(v_{Bx}, v_{By})$. Además $v_A=v_{Bx}$

$$-0.7v_{Bx}-0.7v_{By}=0.7v_{Bx}$$

$$v_{By}=-2v_A$$

la magnitud de v_B, está dada por

$$v_B=\sqrt{\mathbf{v}_x^2+\mathbf{v}_y^2}=\sqrt{\mathbf{v}_A^2+4\,\mathbf{v}_A^2}=2.24\ v_A$$

sustituyendo v_B en la expresión para la energía

$$\frac{1}{2}v_A^2+\frac{1}{2}(2.24\ v_A)^2+g(1\text{sen } 45°)=g1$$

despejando v_A, se obtiene

$$v_A=0.49\ \text{m/s}$$

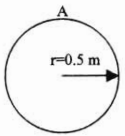
UNIDAD V

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Puede ser negativo el momento de inercia de un cuerpo? Explicar su respuesta.

2. El radio de giro de un cuerpo de 5 kg. es 0.4 m, determinar su momento de inercia.

3. El momento de inercia de un disco de 2 kg respecto a un eje que pasa por su centro de masa es $I=\frac{1}{2}mr^2$. Aplicar el teorema de los ejes paralelos y determinar el momento de inercia del disco respecto a un eje que pasa por el punto A.

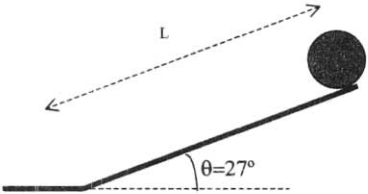


4. .Las ruedas delanteras de un carro soportan un peso de 7,840 N y las traseras de 6,860 N. La distancia entre los ejes de las llantas es de 2.4 m.

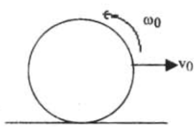
   a) ¿Cuál es el peso total del carro?

   b) ¿A qué distancia horizontal del eje delantero se encuentra el centro de masa?

5. Un cilindro sólido de radio R=0.2 m y una masa M=12 kg, rueda sin resbalar partiendo del reposo una distancia L=6.5 m, sobre un plano inclinado como muestra la figura. Calcular su velocidad al llegar al piso.



6 Una bola de boliche ($I = \frac{2}{5}mr^2$) de 20 cm de radio y 5.5 kg es lanzada sobre una superficie horizontal con velocidad inicial v_0=4.6 m/s y con velocidad angular ω_0=9 rad/s, en las direcciones que muestra la figura. Si el coeficiente de fricción entre la bola y el piso es de 0.1, calcular el tiempo que tarda en empezar a rodar sin resbalar y las velocidades lineal y angular para ese tiempo.



UNIDAD VI

TRABAJO-ENERGÍA

I. Introducción

En cursos anteriores se vieron los conceptos de trabajo y energía para el caso de partículas puntuales. Se dedujo la ley de conservación de la energía mecánica a partir del teorema trabajo-energía, y considerando que las partículas solamente estaban sujetas a fuerzas conservativas.

Se aplicó dicha ley de conservación en la solución de problemas, como una alternativa a la utilización de las leyes de Newton o como un complemento a éstas.

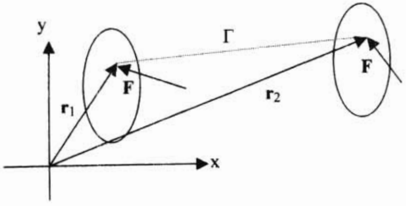
En ésta unidad se estudiarán el trabajo y la energía con relación al movimiento de un cuerpo rígido.

II. Trabajo

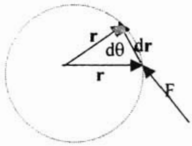
El trabajo mecánico hecho por una fuerza externa **F** sobre un cuerpo rígido, cuando este describe una trayectoria Γ, como se muestra en la figura, se define como:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}.\mathrm{d}\,\mathbf{r}$$

Donde **F** es la fuerza y **dr** el desplazamiento y la integral se calcula sobre la trayectoria Γ.



Si se aplica esta definición a un cuerpo que realiza un movimiento de rotación



$$\mathbf{dr}=\mathbf{r}d\theta$$

$$W=\int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{F.r}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} F_t r d\theta$$

Donde F_t es la componente tangencial de la fuerza. Pero el producto $F_\tau r$ es la torca

$$\tau=F_t r$$

así el trabajo hecho por una torca está dado por:

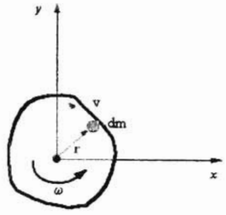
$$W=\int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta \qquad \text{VI.1}$$

si la torca τ es constante

$$W=\tau\Delta\theta$$

III. Energía Cinética de Rotación

Considérese un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo



La energía cinética de la partícula de masa dm respecto al eje de giro, esta dada por

$$dK = \frac{1}{2} v^2 dm$$

Si sumamos la energía cinética de todas las partículas, se obtiene la energía cinética de rotación del cuerpo rígido, por tanto

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \int v^2 dm$$

pero $v = \omega r$ y ω es la misma para todos los puntos del cuerpo rígido, por tanto K_{rot}

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$$

y nuevamente la integral es el momento de inercia

$$I = \int r^2 dm$$

y la energía cinética de rotación respecto al eje de giro esta dada por

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \text{VI.2}$$

Movimiento de Traslación y Rotación

Cuando un cuerpo además de girar en torno a un eje, realiza un movimiento de traslación, su energía cinética total está dada por

$$K_T=\Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

considerando al cuerpo como un sistema de n partículas. Como se vio en la Unidad II, la velocidad de partícula i ($\mathbf{v}_i$) respecto al sistema fijo en la superficie de la tierra se puede escribir como

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{V}+\mathbf{v}_i'$$

donde $\mathbf{V}$ es la velocidad del centro de masa respecto al sistema fijo en la superficie de la tierra y $\mathbf{v}_i'$ la velocidad de la partícula i respecto al centro de masa. Sustituyendo esta última expresión en la ecuación para la energía cinética

$$K_T=\Sigma \frac{1}{2} m_i(\mathbf{V}+\mathbf{v}_i')\bullet(\mathbf{V}+\mathbf{v}_i')$$

$$K_T = \Sigma \frac{1}{2} m_i(V^2+2\mathbf{V}\bullet \mathbf{v}_i'+ v_i'^2)$$

$$K_T = \frac{1}{2} \Sigma m_i V^2 + \mathbf{V} \bullet \Sigma m_i \mathbf{v}_i' + \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i'^2)$$

$$K_T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i'^2)$$

ya $\Sigma m_i = M$ y el término $\Sigma m_i \mathbf{v}_i' = MV' = 0$, ya que es el momento lineal del centro de masa respecto a sí mismo. Si ahora consideramos lo establecido en la unidad V, en relación a que todo Movimiento General de un cuerpo (traslación y rotación, simultáneos) se puede observar como el movimiento de traslación del centro de masa más el movimiento de rotación alrededor del centro de masa. De esta manera v_i', la velocidad de partícula i respecto al centro de masa, es la velocidad tangencial de la partícula en su movimiento de rotación alrededor del centro masa, y se puede escribir como:

$$v_i' = \omega r_{i'}$$

siendo ω la velocidad angular. Así K_T se puede expresar como:

$$K_T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i \omega r_i'^2)$$

pero ω es la misma para todos los puntos del cuerpo, por lo que se puede sacar como factor común

$$K_T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \omega \Sigma m_i r_i'^2)$$

el término $\Sigma m_i r_i'^2$, corresponde al momento de inercia (I') del cuerpo respecto al eje de giro que pasa por el centro de masa. Finalmente la ecuación anterior se puede escribir como:

$$K_T = \frac{1}{2} I'\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 \qquad \text{VI.3}$$

siendo el primer término la energía de cinética de rotación (K_{Rot}) del cuerpo alrededor del centro de masa

$$K_{Rot} = \frac{1}{2} I'\omega^2$$

y el segundo término la energía cinética de traslación ($K_{Tras.}$) del cuerpo respecto a un sistema de referencia fijo en la superficie de la tierra

$$K_{Tras} = \frac{1}{2} mv^2$$

IV. Teorema Trabajo-Energía

Para el caso de un movimiento de traslación es fácil obtener el teorema trabajo-energía, a partir de la definición de trabajo mecánico hecho por una torca.

$$W_n = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau_n d\theta$$

Siendo W_n y τ_n el trabajo neto y la torca neta externa, respectivamente. Pero de acuerdo a la 2ª ley de Newton para el movimiento de rotación.

$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \qquad d\theta=\omega dt$$

así el trabajo neto queda como

$$W=\int_{t_1}^{t_2} I\frac{d\omega}{dt}\omega dt$$

eliminando dt

$$W=I\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega=\frac{1}{2}I(\omega^2-\omega_0^2)$$

$$W=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$W=K-K_0=\Delta K \qquad \text{VI.4}$$

Nuevamente, si además del movimiento de rotación existe movimiento de traslación, la energía cinética esta desde la ecuación VI.3.

En virtud de que el teorema trabajo-energía se dedujo a partir de la 2ª ley de Newton, la cual sólo considera las fuerzas externas, al aplicarlo no deberán tomarse en cuenta las fuerzas internas

V. Conservación de la Energía

La conservación de la energía está relacionada con el hecho de que sólo actúen fuerzas conservativas sobre el sistema. Estas fuerzas son aquellas cuyo trabajo entre dos posiciones cualesquiera, no depende de la trayectoria, o bien que el trabajo que realizan sobre un cuerpo en una trayectoria cerrada es cero.

Como consecuencia de que el trabajo hecho por las fuerzas conservativas depende sólo de la posición inicial y final de un cuerpo, el trabajo se puede expresar como el incremento de una función que sólo depende de la posición del cuerpo. A esta función V se le llama energía potencial y esta definida como:

$$-\Delta V = W_{1\rightarrow 2} \qquad \text{VI.5}$$

Cada fuerza conservativa tiene una energía potencial asociada, como se vio en cursos anteriores, la energía potencial asociada al peso y a la fuerza de un resorte elástico son:

a) Para el peso mg

$$W = \Delta(mgh_{\text{C. de M}})$$

$$V = mgh_{\text{C. de M}} + C$$

Donde C es una constante y $h_{\text{C. de M}}$ es la altura del centro de masa medida respecto al nivel que se seleccione como el nivel cero de la energía potencial, lo cual permite a su vez hacer cero la constante C. La altura que se considera es la del centro de masa de acuerdo a lo visto en la Unidad I, ya que éste se comporta como un punto en el que se encuentra concentrada toda la masa y sobre el cual actúan las fuerzas externas, en este caso el peso.

b) Para la fuerza de un resorte elástico que cumple la ley de Hooke

$$W = -\Delta(\frac{1}{2}kx^2)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

Siendo x la deformación del resorte y k su constante.

Conservación de la Energía

Si se considera que sobre un sistema sólo actúan fuerzas conservativas, de acuerdo a la definición de energía potencial (ecuación VI.5), el trabajo realizado esta dado por:

$$W_{1\to 2} = -\Delta V = -(V_2 - V_1)$$

Así mismo, de acuerdo al teorema trabajo-energía (ecuación VI.4), el mismo trabajo se puede expresar como

$$W_{1\to 2} = \Delta K$$

igualando ambas ecuaciones:

$$\Delta K = -\Delta V$$

$$\Delta K + \Delta V = 0$$

o bien

$$\Delta(K + V) = 0$$

al término que aparece entre paréntesis se le llama energía mecánica del sistema E.

$$E = K + V \qquad \text{VI.6}$$

Si solo actúan fuerzas conservativas

$$\Delta E = 0$$

y por consiguiente

$$E = \text{constante}$$

Cuando no actúan fuerzas de fricción u otras fuerzas disipativas sobre un cuerpo rígido, la energía mecánica se conserva como en el caso de una partícula. Sin embargo existe un caso en el cual aún actuando fuerzas de ficción sobre un cuerpo rígido, la energía se conserva.

Este ocurre cuando un cuerpo rueda sin resbalar sobre una superficie. La razón es que la fuerza de fricción no realiza trabajo en este caso, siempre actúa paralela a la superficie sobre la cual se mueve el cuerpo y no existe desplazamiento instantáneo paralelo a la superficie cuando rueda, lo cual implica que la velocidad del punto de contacto entre la superficie y el cuerpo en movimiento, es cero.

Si además de las fuerzas conservativas actúan fuerzas no conservativas sobre el sistema, de acuerdo al teorema trabajo-energía el trabajo neto está dado por

$$W_n = \Delta K \qquad \text{VI.7}$$

Pero W_n se puede expresar como

$$W_n = W_{FC} + W_{FNC}$$

Donde W_{FC} y W_{FNC} es el trabajo hecho por las fuerzas conservativas y las no conservativas, respectivamente.

$$W_n = W_{FC} + W_{FNC} = \Delta K$$

pero

$$W_{FC} = -\Delta V$$

$$-\Delta V + W_{FNC} = \Delta K$$

$$W_{FNC} = \Delta K + \Delta V$$

Finalmente

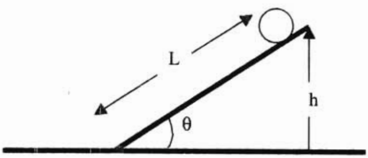
$$W_{FNC} = \Delta E \qquad \text{VI.8}$$

Que es la relación mas general entre el trabajo y la energía mecánica.

A continuación se verán una serie de aplicaciones del principio de conservación de la energía.

Ejemplo 1

Un cilindro sólido ($I=\frac{1}{2}MR^2$) de radio R y masa M rueda sin resbalar, partiendo del reposo, una distancia L sobre un plano inclinado como muestra la figura. Calcular su velocidad al llegar al piso.



h=L sen θ

Solución:

Como el cilindro rueda sin resbalar se conserva la energía. Si suponemos el nivel cero de la energía potencial en el piso, entonces en la parte superior el cilindro sólo tiene energía potencial y en el piso cinética

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

para el cilindro $I = \frac{1}{2}MR^2$ y $v = \omega R$ si rueda sin resbalar

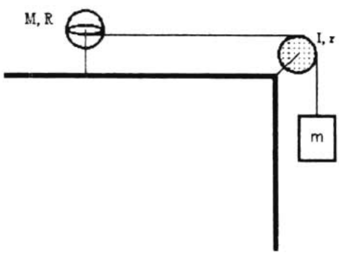
$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$Mgh = \frac{3}{4} Mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

Ejemplo 2

El sistema que muestra la figura está compuesto de el bloque de masa m, la polea de momento de inercia I y radio r, y un cascarón esférico montado de forma tal que puede rotar alrededor de su eje vertical. El cascarón esférico tiene una masa M y un radio r. La cuerda con masa despreciable está enrollada alrededor de la parte media del cascarón y cuando el bloque cae la esfera y la polea giran. Suponiendo que la velocidad inicial del bloque es cero, calcular su velocidad cuando ha bajado una distancia h, respecto a su posición inicial.



Solución:

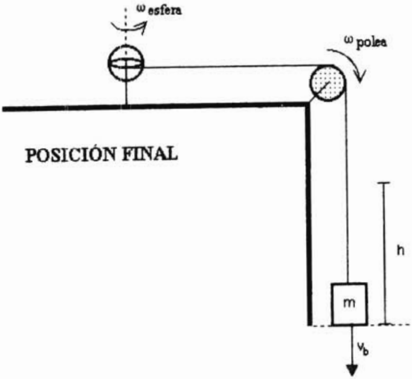
Nótese que éste problema se resolvió como ejemplo en la Unidad V, aplicando la 2ª ley de Newton. Aquí se resolverá con métodos energéticos.

En virtud de que sólo actuaran fuerzas conservativas, la energía mecánica del sistema formada por los tres cuerpos se conserva

$$E_i = E_f$$

$$k_i + V_i = k_f + V_f$$

La energía E_i corresponde a las posicion inicial y E_f a la final



La energía inicial corresponde a la energía potencial del bloque, porque los tres cuerpos están en reposo y la energía final a la suma de las energías cinéticas de los tres cuerpos los cuales se encuentran en movimiento.

$$k_i + V_i = k_f + V_f$$

$$O + mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}I_{polea}\omega_{polea}^2 + \frac{1}{2}I_{esfera}\omega_{esfera}^2$$

Pero $I_{esfera} = \frac{2}{5}MR^2$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}I_{polea}\omega_{polea}^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}MR^2)\omega_{esfera}^2$$

La energía cinética del bloque es de traslación y de rotación la de la polea y la esfera. Esta última ecuación tiene tres incógnitas v_b, ω_{polea} y ω_{esfera}. Para encontrar la expresión para la velocidad del bloque v_b, se requieren dos ecuaciones mas, las cuales se pueden obtener a partir de las relaciones cinemáticas entre las tres incógnitas.

Relaciones cinemáticas:

$$v_b = \omega_{polea}r$$

$$v_b = \omega_{esfera}R$$

ya que la velocidad tangencial de la esfera y la polea, son iguales a la velocidad del bloque, como se aprecia en la figura anterior que corresponde a la posición final del sistema. Despejando ω de estas dos relaciones

$$\omega_{polea} = \frac{v_b}{r}$$

$$\omega_{esfera} = \frac{v_b}{R}$$

sustituyendo estas dos relaciones en la ecuación para la energía

$$mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}I_{polea}(\frac{v_b}{r})^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2(\frac{v^2{}_b}{R})$$

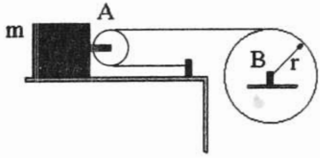
reduciendo

$$2mgh = v_b^2(m + \frac{I_{polea}}{r} + \frac{2}{5}M)$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I_{polea}}{r^2} + \frac{2}{5}M}}$$

Ejemplo 3

En el instante mostrado, el disco B de 10 kg. y r=0.3 m. tiene una velocidad angular de 2 rad/s en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Si la masa de la polea A es despreciable y el cable se enrolla en B, determine la distancia que recorre el bloque antes de detenerse, si el bloque tiene una masa m=5 kg. y el coeficiente de fricción con el piso es de 0.8.



En este problema no se conserva la energía porque actúa como fuerza de fricción, lo cual disipa la energía. El problema se puede resolver mediante el teorema de trabajo-energía

$$W_n = \Delta E_c$$

$$-fd = E_{c_f} - E_{c_0}$$

pero como al final queda en reposo $E_{c_f}=0$

$$fd = E_{c_o}$$

Y la energía cinética inicial del sistema es la energía de rotación del disco más la energía de traslación del bloque.

$$fd = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \quad (1)$$

esta ecuación contiene dos incógnitas, v_A y a. Existe una relación cinemática entre v_A y v_B la velocidad tangencial de los puntos de la periferia del disco

$$v_A = \frac{1}{2} v_b \quad (2)$$

y $v_b=\omega r$

$$v_A = \frac{1}{2} \omega r \quad (3)$$

Sustituyendo v_A en ecuación (1)

$$fd = \frac{1}{2} m_A (\frac{1}{2} \omega r)^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

Para el disco $I = \frac{1}{2} m_B r^2$

$$fd = \frac{1}{8} m_A \omega^2 r^2 + \frac{1}{4} m_B r^2 \omega^2$$

$$fd = \frac{1}{4} \omega^2 r^2 (\frac{1}{2} m_A + m_B)$$

$$d = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{f} (\frac{1}{2} m_A + m_b) \text{ pero } f = \mu m_A g$$

$$d = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{\mu m_A g} (\frac{1}{2} m_A + m_B)$$

$$d = \frac{1}{4} \frac{(2)^2 (0.3)^2}{(0.8)(5)9.8} (2.5 + 10)$$

$$d = 0.03m = 3cm$$

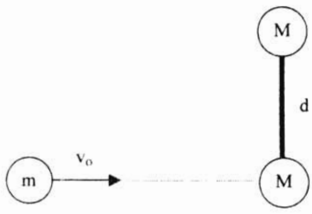
Colisiones con Mancuernas

Ejemplo 4

Sobre una superficie horizontal sin fricción, se encuentra una mancuerna formada por dos partículas de masa M y una barra de longitud d y masa despreciable, inicialmente en reposo, choca contra ella una partícula de masa m que se mueve con velocidad v_0, como muestra la figura. Calcular:

a) El valor de m para que quede en reposo después del choque.
b) La velocidad del centro de masa de la mancuerna después del choque.
c) La velocidad angular de la mancuerna alrededor del centro de masa, después del choque

MANCUERNA



El momento lineal del sistema se conserva por no haber fuerzas externas, entonces

$$P_o=P_f$$

$$mv_o\mathbf{i}=2M\mathbf{v}_{c.m} \qquad (1)$$

el momento angular con respecto al centro de masa, se conserva por no haber torcas externas

$$\mathbf{L}'_o=L'_f$$

$$mv_o\frac{d}{2}\mathbf{k}=I\omega \qquad (2)$$

la energía mecánica se conserva al no actuar fuerzas de fricción

$$E_o=E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2=\frac{1}{2}(2M)v_{c.m}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (3)$$

de ecuación (1)

$$v_{cm}=\frac{mv_o}{2M}$$

y de ecuación (2)

$$\omega=\frac{mdv_o}{2I}$$

sustituyendo v_{cm} y ω en la ecuación (3)

$$\frac{1}{2}mv_o^2=\frac{1}{2}(2M)(\frac{mv_o}{2M})^2+\frac{1}{2}I(\frac{mdv_o}{2I})^2$$

reduciendo términos

$$m=\frac{m^2}{2M}+\frac{d^2m^2}{4I}$$

pero el momento de inercia de la mancuerna con respecto al centro de masa es

$$I=2M(\frac{d}{2})^2=\frac{1}{2}Md^2$$

por tanto

$$m=\frac{m^2}{2M}+\frac{m^2}{2M}$$

finalmente

$$m=M$$

sustituyendo m en la ecuación para v_{cm} y ω

$$v_{cm}=\frac{1}{2}v_o$$

$$\omega=\frac{mdv_o}{2I}=\frac{v_o}{d}$$

UNIDAD VI

AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTAS

1. Si un cuerpo rueda sin resbalar ¿cómo se calcula su energía cinética?

2. Para un cuerpo rígido ¿cómo se calcula la energía potencial debido al peso? ¿Qué altura hay que considerar?

3. ¿Qué diferencias existen entre las ecuaciones VI.7 y VI.8?

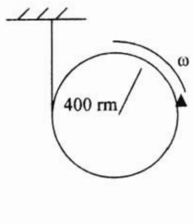
4. ¿Bajo qué condiciones se conserva la energía mecánica de un cuerpo rígido?

5. ¿Qué condición se debe cumplir para que aún actuando una fuerza de fricción sobre un cuerpo, la energía mecánica se conserve?

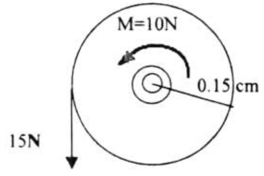
6. Dos cilindros ruedan sobre una pendiente de altura h, si uno es un cascarón y el otro esta lleno, ¿cuál de los dos llega primero al fondo? Justificar su respuesta.

Problemas

1. Un cilindro de 25 kg. ($I = \frac{1}{2} mr^2$), es soltado desde el reposo, como muestra la figura. determinar la velocidad del centro de masa una vez que ha dado 5 vueltas



2. El disco de 25kg que muestra la figura descansa sobre un pasador. Si sobre el actúa una fuerza constante de 15 N que se aplica mediante una cuerda de masa despreciable enrollada en su periferia y una torca de 10 Nm, calcular su velocidad una vez que ha dado 4 vueltas.



UNIDAD VII

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

I. Introducción

El término armónico simple se usa para describir él más elemental de los movimientos oscilatorios. Es una idealización de lo que sucede en el mundo real y permite tener un avance en el entendimiento de fenómenos oscilatorios reales más complicados. Es posible decir que todo movimiento periódico, que es aquel que se repite, es alguna forma de movimiento armónico simple o una superposición de ellos

Los movimientos periódicos son muy comunes en la naturaleza, de forma tal que juegan un papel importante tanto en los fenómenos a nivel atómico como a mayor escala. Inclusive fenómenos que no son periódicos se pueden estudiar bajo ciertas condiciones en función de movimientos armónicos simples

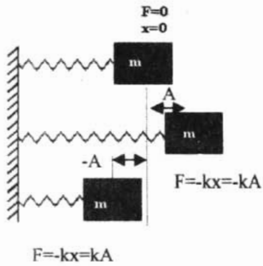
II. El Oscilador Armónico Simple

Una partícula que está sujeta a una fuerza del tipo ley de Hooke

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} \qquad \text{VII.1}$$

Describe un movimiento armónico simple en donde k es una constante y x es la posición de la partícula con respecto a la posición de equilibrio. Dicha ecuación la satisfacen los resortes, ligas y la mayoría de los metales, dentro del llamado límite elástico.

Para el caso de los resortes, si no se alargan o comprimen de modo tal que se rebase el límite de elasticidad, obedecen la ecuación VII.1, mediante el estudio de su comportamiento se pueden establecer las características del oscilador armónico simple. Para este propósito consideraremos el oscilador como muestra la figura



Sin tomar en cuenta las fuerzas de fricción. Si se desplaza m hasta una deformación de magnitud A y se suelta, de la experiencia se sabe que el cuerpo oscilará alrededor del punto de equilibrio (x=0) y se moverá entre A y -A

Es claro que al variar la posición de la partícula le fuerza de restitución, llamada así porque trata de que el resorte recupere su forma original, será variable y por lo tanto también lo será la aceleración y la velocidad. Al ser periódico el movimiento, esto se refleja tanto en la velocidad como en la aceleración, la primera es máxima en la posición de equilibrio y cero en A y -A; la aceleración es máxima en los extremos y cero en el origen.

Antes de entrar a mayor detalle, es necesario definir algunas cantidades que son útiles para estudiar el movimiento del oscilador armónico. Tal es el caso de la amplitud A que se define como el máximo desplazamiento de la posición de equilibrio

$$\text{Amplitud} = A = x_{max}$$

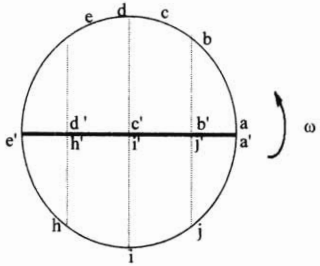
El periodo T definido como el tiempo necesario para dar una oscilación completa y la frecuencia (f) que equivale al número de oscilaciones dadas en la unidad de tiempo. Estas cantidades están relacionadas mediante la ecuación.

$$f = \frac{1}{T}$$

Los términos amplitud, periodo, frecuencia y oscilación, siempre van asociadas a movimientos periódicos.

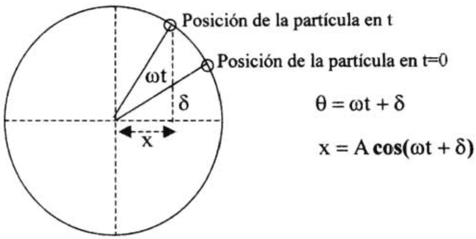
III. Relación Entre los Movimientos Armónico Simple y Circular

El movimiento armónico simple es la proyección del movimiento circular uniforme sobre uno de sus diámetros como se aprecia en la siguiente figura



La partícula puntual describe un movimiento circular uniforme (ω=cte) en sentido contrario a las manecillas del reloj, ocupa en un momento dado las posiciones a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, y sus proyecciones sobre el diámetro de la circunferencia son respectivamente, a', b', c', d', e', f ', g', h', i', j'. Nótese que al realizar la partícula puntual el movimiento circular su proyección sobre el diámetro lleva a cabo un movimiento oscilatorio, ya que al ir la partícula de a a g, la proyección se mueve en línea recta de a' a g', y al ir de g a a , la proyección se mueve de g' a a'.

Sin embargo aunque la partícula describe una trayectoria circular con una velocidad constante en magnitud, su proyección sobre el diámetro se mueve con una velocidad cuya magnitud depende de la posición, como se muestra a continuación



Si el radio de la circunferencia es A, la posición de la proyección en un tiempo t es

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad \text{VII.3}$$

derivando con respecto al tiempo

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) \qquad \text{VII.4}$$

derivando v con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) \qquad \text{VII.5}$$

nótese en la figura anterior que

$$\theta = \omega t + \delta$$

Siendo ω la velocidad angular y δ la llamada constante de fase que es igual a $\theta(0)$

$$\theta(0) = \delta$$

Las ecuaciones VII.4, VII.5 y VII-6 son válidas para todo movimiento armónico simple.

IV. Solución de la Ecuación del Oscilador Armónico

De acuerdo a la ecuación VII.l, la fuerza que actúa sobre el oscilador armónico está dada por

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$$

si se aplica la 2ª ley de Newton al oscilador

$$F = ma$$

pero $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

dividiendo entre m y rearreglando está ecuación se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{VII.6}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, por incluir una segunda derivada y tener coeficientes constantes tanto la segunda derivada como la posición x. La solución de ésta ecuación diferencial, es obviamente de la forma de la ecuación VII.3

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

si se sustituye x(t) y su segunda derivada de la ecuación VII.5, en la ecuación diferencial VII.6, se obtiene

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \delta) = 0$$

reduciendo términos

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{VII.7}$$

Para determinar el periodo, recuérdese que el movimiento se repite después de transcurrir un periodo, por lo tanto la posición del oscilador debe ser la mima para t y para un tiempo t + T. Esto sucede sólo si el argumento se incrementa en 2π, es decir:

$$\omega t + \delta + 2\pi = \omega(t + T) + \delta$$

de donde se obtiene

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{y} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{VII.8}$$

El valor de la amplitud y la constante de fase, se obtienen a partir de las condiciones iniciales para la velocidad y la posición del oscilador de la siguiente manera

$$x_0 = x(0) = A\,\mathbf{cos}\,\delta$$

$$v_0 = v(0) = -A\omega\,\mathbf{sen}\,\delta$$

Dividiendo miembro a miembro a miembro ambas ecuaciones

$$\frac{v_0}{x_0} = -\frac{A\omega\,\mathbf{sen}\,\delta}{A\,\mathbf{cos}\,\delta}$$

lo cual se reduce a

$$\tan\delta = -\frac{v_0}{x_0\omega}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{-v_0}{x_0\omega}$$

si ahora elevamos al cuadrado x_0 y v_0

$$x_0 = A^2 \cos^2 \delta$$

$$v_0 = A^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \delta$$

sumando ambas ecuaciones para x_0 y v_0

$$x_0 + \frac{v_0{}^2}{\omega^2} = A^2(\operatorname{sen}^2 \delta + \cos^2 \delta)$$

$$A = \sqrt{x_0 + \frac{v_0}{\omega_0}} \qquad \text{VII.10}$$

La ecuación VII.4 para la velocidad, puede expresarse de otra forma usando la relación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$v(t) = \omega^2[A^2 - A^2 \cos^2(\omega t + \delta)]$$

pero el segundo término dentro del paréntesis es $x^2(t)$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad \text{VII.11}$$

V. Energía del Oscilador Armónico Simple

Ya que la única fuerza que actúa sobre el oscilador es la del resorte, la cual es conservativa con una energía potencial V(x) igual a

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

la energía mecánica del oscilador armónico, está dada por

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

se conserva y su valor se puede determinar a partir de ésta ecuación y la ecuación VII.11 para la velocidad.

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} kx^2$$

pero de la ecuación VII.7 $k=m\omega^2$

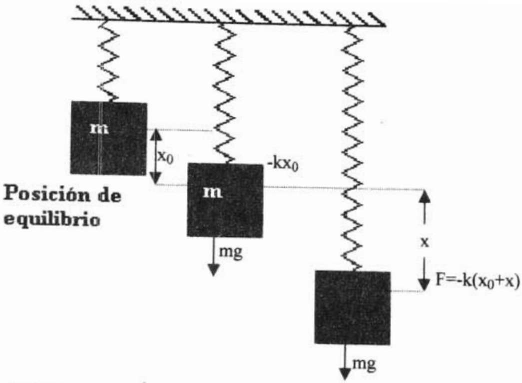
$$E = \frac{1}{2}\left[m\omega^2 A^2 - m\omega^2 x^2 + m\omega^2 x^2\right]$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2 \qquad \text{VII.12}$$

ecuación que es igual a la máxima energía potencial que tiene el oscilador en los extremos cuando $x = \pm A$ y en donde la energía cinética es cero. Al acercarse la partícula a la posición de equilibrio (x=0), la energía potencial disminuye hasta hacerse cero, en éste punto es en donde la energía cinética es máxima e igual a la energía total. Una vez que pasa por x=0, la energía cinética empieza a disminuir y la potencial a aumentar, hasta alcanzar en el otro extremo nuevamente el valor máximo. De esta manera el oscilador armónico es un ejemplo de un intercambio continuo entre la energía cinética y la potencial

Ejemplo 1

Demostrar que para un oscilador armónico vertical la solución es la misma que para el horizontal.



Nótese que en virtud de su peso la posición de equilibrio esta en x_0, dado por

$$-kx_0 - mg = 0 \rightarrow x_0 = \frac{-mg}{k}$$

aplicando la 2ª ley de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + x_0) - mg$$

sustituyendo x_0

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg - mg = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

por lo tanto la solución es la misma que la del oscilador en posición horizontal.

Ejemplo 2

Una masa de 10 kg oscila de acuerdo a la ecuación

$$x = 0.1\cos(\pi t + \frac{1}{4}\pi)$$

donde x esta en metros y t en segundos. Encontrar:

a) La frecuencia y la amplitud del movimiento

b) El desplazamiento y la velocidad en t=0 y en t=2.75 seg.

c) La energía mecánica total

d) La energía cinética y potencial para t=2.75 seg.

Solución

Comparando la ecuación

$$x = 0.1\cos(\pi t + \frac{1}{4}\pi)$$

con

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

se obtiene:

a) A=0.1m; ω=π rad/s y $\delta = \frac{1}{4}\pi \;\; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0.5$ ciclos/seg.

b) $$x(0) = A\cos\delta = 0.01\cos\frac{1}{4}\pi$$

$$x(2.75) = 0.1\cos(2.75\pi + \frac{1}{4}\pi) = 0.1\cos 3\pi$$

$$v(0) = A\omega\,\mathbf{sen}(\omega t + \delta) = -0.1\pi\frac{1}{4}\pi$$

$$v(2.75) = -0.1\pi\,\mathbf{sen}(2.75\pi + \frac{1}{4}\pi) = -0.1\pi 3\pi$$

c) $$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad k = m\omega^2 = 10(\pi^2) = 98.7\frac{N}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}(98.7)(0.1)^2 = 0.49 \text{ joules}$$

d) $$V(2.75) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(98.7)(0.1\,\mathbf{cos}\,3\pi)$$

$$K = E - V$$

$$K = 0.49 \text{ joules}$$

VI. Otros Ejemplos de Osciladores Armónicos

Todo fenómeno natural se comporta como un oscilador armónico, si satisface una ecuación del tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

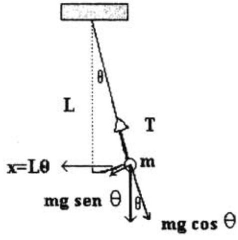
siendo ω^2 una constante que para el caso del resorte elástico es

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

en otros casos, ésta constante puede ser diferente. A continuación se estudiaran otros dispositivos que se comportan como osciladores armónicos simples.

1. El Péndulo Simple

Éste consiste de una partícula puntual de masa m, sujeta a un de los extremos de una cuerda de longitud L y de masa despreciable, pendiendo del punto "o" que muestra la figura:



El movimiento de la partícula m es de rotación en torno a un eje perpendicular al plano de la página y que pasa por el punto "o". Aplicando la 2ª ley de Newton

$$\tau = I\alpha$$

En el diagrama de cuerpo libre, se puede apreciar que la única fuerza que produce torca en torno al eje que pasa por el punto o, es la componente tangencial del peso.

$$-\,mgL\,\mathbf{sen}\,\theta = I\alpha$$

pero $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ y para la particula puntual $I = mr^2 = mL^2$

$$mL^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL\,\mathbf{sen}\,\theta = 0$$

dividiendo entre mL^2

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\,\mathbf{sen}\,\theta = 0 \qquad \text{VII.13}$$

Esta es la ecuación del péndulo simple para cualquier ángulo. El desarrollo en serie del senθ es

$$\mathbf{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots..$$

para pequeñas oscilaciones con $\theta \ll 1$, se pueden despreciar los término de θ^3 en adelante, entonces

$$\mathbf{sen}\,\theta \approx \theta$$

sustituyendo esta aproximación en la ecuación VII.13

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad \text{VII.14}$$

ecuación que tiene la misma forma que la del oscilador armónica, aunque la frecuencia angular ω, este caso está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{VII.15}$$

Así la solución del péndulo para pequeñas oscilaciones, tiene la misma forma que para el resorte

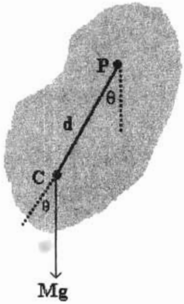
$$\theta(t) = \theta_m\,\mathbf{cos}(\omega t + \delta) \qquad \theta_m = \text{amplitud}$$

$$\theta_m = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{w_0^2}{\omega^2}}$$

$$\delta = \tan^{-1}\frac{-w_0}{\theta_0\omega}$$

siendo θ_o y w_o la posición y la velocidad angular en t=0, respectivamente.

2. Péndulo Físico



Este se refiere a un sólido cualquiera que gira en torno a un eje fijo que pasa por el punto P, como muestra la figura. Procediendo de igual manera que con el péndulo simple

$$\tau = I\alpha$$

$$-\,mgL\,\mathbf{sen}\,\theta = I\alpha$$

nuevamente para pequeñas oscilaciones $\mathbf{sen}\,\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{I}\theta = 0$$

por lo que para el péndulo físico para pequeñas oscilaciones

$$\theta(t) = \theta_m\,\mathbf{cos}(\omega t + \delta)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad \text{VII.16}$$

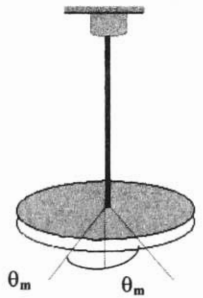
$$\theta_m = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{w_0^2}{\omega^2}}$$

$$\delta = \tan^{-1}\frac{-w_0}{\theta_0\omega}$$

siendo I el momento de inercia del cuerpo que oscila.

3. Péndulo de Torsión

Este consiste en una varilla de torsión de masa despreciable la cual está sujeta en uno de sus extremos a un soporte y el otro está empotrado en un cuerpo de forma arbitraria, es éste caso a un disco.



Para ángulos pequeños, la varilla de torsión satisface la ecuación

$$\tau = -k\theta$$

siendo k la constante de torsión. Nótese que ésta ecuación es similar a la ley de Hooke para resortes.

Aplicando la 2ª ley de Newton a m

$$\tau = I\alpha$$

$$-k\theta = I\alpha$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

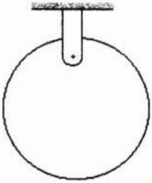
por tanto la solución es la misma que para el péndulo simple con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \qquad \text{VII.17}$$

donde I es el momento de inercia del disco respecto al eje de giro.

Ejemplo 3

El disco que muestra la figura tiene una masa de 10 kg y un radio de 20 cm. determinar el periodo de oscilación del disco, para pequeñas oscilaciones.



Solución:

Este es un péndulo físico cuya frecuencia angular está dada por la ecuación VII.16

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

donde I es el momento al eje de giro que se encuentra desplazado una distancia r respecto al centro de masa. Para calcular I se hará uso del teorema de los ejes paralelos

$$I = I_0 + mD^2$$

donde $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$ es el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa y D la distancia entre los ejes, en éste caso r.

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

y la frecuencia angular del disco

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{\frac{2}{3}mr^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{r}}$$

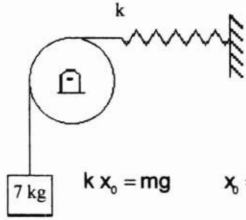
de la ecuación VII.8

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}*\frac{0.2}{9.8}}$$

T=1.1 seg

Ejemplo 4

El bloque de 7 kg está suspendido por una cuerda que pasa sobre un disco de 5 kg, como muestra la figura. Si la constante del resorte es de 1000 N/m y la cuerda no resbala sobre el disco, determinar la frecuencia de oscilación del disco.



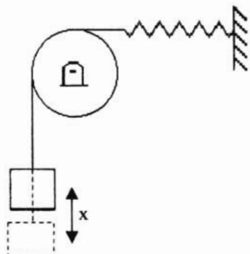
Posición de equilibrio

$$k\,x_0 = mg \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$$

Este es un problema el cual se puede resolver mediante la aplicación de la 2ª ley de Newton tanto al disco como el bloque, sin embargo se puede hacer también a través del uso de la ley de la conservación de la energía, ya que las dos fuerzas que influyen en el movimiento, el peso y la del resorte, son conservativas. Por lo tanto

$$E\text{=constante} \quad \text{y por consiguiente} \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Si se toma una posición arbitraria en donde el resorte este deformado y tanto el disco como el bloque se encuentren en movimiento



La energía mecánica del sistema para la posición punteada es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx_t^2 - mgx$$

donde $x_t=x_0+x$. Derivando E con respecto al tiempo y tomando en consideración que tanto v, ω y x son funciones del tiempo

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + I\omega\frac{d\omega}{dt} + kx_t\frac{dx_t}{dt} - mg\frac{dx}{dt} = 0$$

pero la velocidad del bloque es igual a la velocidad tangencial de los puntos de la periferia del disco, por tanto $v=\omega r$ y

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt} \quad y \quad \frac{dx_t}{dt} = \frac{dx}{dt} = v$$

sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación para derivada de la energía

$$mv\frac{dv}{dt} + I\frac{1}{r^2}v\frac{dv}{dt} + kx_t v - mgv = 0$$

eliminando v y tomando en cuenta que $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ y que $x_t = x_o + x = \frac{mg}{k} + x$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + I\frac{1}{r^2}\frac{d^2x}{dt^2} + k(\frac{mg}{k} + x) - mg = 0$$

sustituyendo $I = \frac{1}{2}mr^2$ para el disco y eliminando termino

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}mr^2\frac{1}{r^2}\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{3}{2}m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

dividiendo entre $\frac{3}{2}m$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2}{3}\frac{k}{m}x=0 \quad y \quad \omega=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

así el movimiento del bloque y el disco es un movimiento armónico simple con una frecuencia angular dada por ω.

UNIDAD VII

AUTOEVALUACIÓN

Preguntas

1. Mencione algunos ejemplos de movimiento armónico simple a los que no se haya hecho referencia en esta unidad.

2. Si se duplica la amplitud de un movimiento armónico simple, ¿qué pasa con la energía mecánica?

3. Si a un reloj de péndulo se lleva de la Ciudad de México a nivel del mar, ¿se atrasará o adelantará?

4. ¿Si la masa de un péndulo simple se duplica que pasa con el período? y si se duplica la longitud ¿qué sucede con el periodo?

5. Si la masa de un oscilador armónico simple se duplica, ¿qué pasa con la frecuencia angular? y si simultáneamente se duplica la constante del resorte ¿qué sucede con la frecuencia?

6. ¿En qué puntos de la trayectoria de un oscilador armónico simple es máxima la energía cinética? ¿y en cuáles la energía potencial?

Problemas

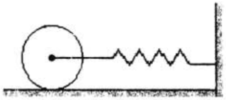
1. La masa de un oscilador armónico simple es de 3 kg y la constante del resorte igual 150 N/m. Si parte del reposo en el momento que se encuentra a 7 cm de la posición de equilibrio, calcular:

    a) La amplitud, la constante de fase, el período y numero de oscilaciones que realiza en 4 seg.

    b) La energía mecánica.

c) La energía cinética y potencial en t=4 seg.

2. El disco de masa m y radio r que muestra la figura tiene un eje en su centro mediante el cual se sujeta al resorte, si rueda sin resbalar una vez que es soltado desde una posición diferente a la de equilibrio, encontrar la frecuencia de oscilación siguiendo el procedimiento del ejemplo 4.



UNIDAD VIII

OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO Y FORZADO

I. Introducción

En la unidad anterior se estudió el oscilador armónico simple en virtud de su importancia en el contexto de la Física y de la Ingeniería. Al analizarlo se consideró que las únicas fuerzas que actuaba sobre él, eran fuerzas proporcionales al desplazamiento como la del resorte, dentro de los límites de elasticidad perfecta, sin embargo en el mundo real se sabe que es prácticamente imposible evitar que actúen otras fuerzas como la de fricción, la cual es causa de que la energía mecánica sea disipada en forma de calor y como consecuencia que la amplitud de oscilación no sea constante como en el caso del oscilador armónico simple, sino que decrezca en el transcurso del tiempo. Este hecho se aprovecha en el diseño de los llamados amortiguadores que permiten reducir con cierta rapidez los movimientos no deseados, como el movimiento vertical de un automóvil al pasar un bache o la vibración de un edificio como consecuencia de un temblor y otros muchos más.

Existen otras fuerzas que en lugar de reducir la energía mecánica y la amplitud del oscilador, tienden a aumentarlas, tal es el caso de la fuerza producida por el viento que puede ser tan importante que llega a volcar automóviles o a derribar puentes como el colgante de Tacoma, en el estado de Washington, Estados Unidos, el cual se colapso como consecuencia de fuertes rachas de viento que generaron una fuerza con una frecuencia similar a la natural de oscilación del puente lo cual ocasionó que la amplitud del movimiento de oscilación del puente fuera en aumento. A este fenómeno mediante el cual una fuerza impulsora tiene una frecuencia igual que la natural de un cuerpo, se le conoce como resonancia.

En esta unidad se estudiará de manera superficial el oscilador sujeto a fuerzas que disipan la energía y a fuerzas impulsoras que tienden a incrementarla, además de las fuerzas que mantienen constante la energía mecánica, como la del resorte.

II. Oscilador Amortiguado

Como se mencionó en la introducción, en este caso además de la fuerza de restitución elástica proporcional a la posición del cuerpo, actúan fuerzas disipativas como a la que se ve sujeto un oscilador que se encuentra sumergido en el seno de un fluido viscoso, cuya fuerza que ejerce es proporcional y en sentido contrario a la velocidad

$$F = -bv = -b\frac{dx}{dt} \qquad \text{VIII-1}$$

donde b es una constante llamada el coeficiente de amortiguamiento, que depende de la viscosidad del fluido y de la forma del cuerpo. Tomando en consideración las fuerzas que actuan sobre el oscilador

$$F = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

dividiendo todo entre m

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{VIII.2}$$

Esta es la ecuación del oscilador forzado. La solución de la ecuación diferencial se sale de los alcances del curso por lo que sólo presentará la solución para el caso en que el amortiguamiento no es muy grande

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\,\mathbf{cos}(wt + \delta) \qquad \text{VIII.3}$$

donde la constante de amortiguamiento $\gamma = \frac{b}{2m}$. Nótese que la solución es similar a la del oscilador armónico, aunque con una amplitud que depende del tiempo, dada por

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \qquad \text{VIII.4}$$

Donde $A_0 = A(0)$ y m la masa. La rápidez con que decrece la amplitud depende fundamentalmente del factor

$$\gamma = \frac{b}{2m} \qquad \text{VIII:5}$$

El valor de γ determina el tipo de movimiento que desarrolla el sistema masa-resorte. Se distinguen tres casos, a saber

a) Subamortiguado $\omega_0 > \gamma$, siendo $\omega_0^{\ 2} = \frac{k}{m}$ la frecuencia del oscilador armónico simple.

   En esta situación el cuerpo oscila con una amplitud que decrece con el tiempo y una frecuencia dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \gamma^2} \qquad \text{VIII.6}$$

   y por tanto su periodo igual a

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^{\ 2} - \gamma^2}} \qquad \text{VIII.7}$$

   La amplitud de oscilación está dada por la ecuación VIII.4

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$$

   para un tiempo $t=\tau=\frac{1}{2\gamma}$, llamado el tiempo de relajación, la amplitud se reduce de la siguiente manera:

$$A(\tau) = A_0 e^{-0.5} = 0.61 A_0$$

   La energía mecánica del oscilador amortiguado está dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^{\ 2} A_0^2 e^{-2\gamma t}$$

   y la potencia disipada por el amortiguamiento, dada por

$$P = -\frac{dE}{dt}$$

   está dada por

$$P=-(-2\gamma)\frac{1}{2}m\omega_o^2 A_o^2 e^{-2\gamma t}=2\gamma E$$

pero $\tau=\frac{1}{2\gamma}$, por lo tanto

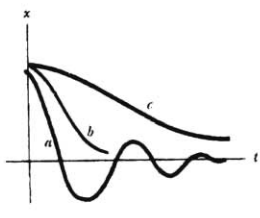
$$P=\frac{E}{\tau}$$

b) Amortiguamiento crítico $\omega_0 = \gamma$. El sistema no oscila sino que sólo regresa a su posición de equilibrio.

c) Sobreamortiguado $\omega_0 < \gamma$. Tampoco existe un movimiento oscilatorio en este caso, ya que la fuerza amortiguadora determina el movimiento y como consecuencia el sistema masa - resorte solo regresa a su posición de equilibrio al igual que el amortiguamiento crítico, pero con mayor lentitud.

Para cada caso mencionado, la amplitud en función del tiempo se describe en la siguiente gráfica

La gráfica de la amplitud en función del tiempo se muestra a continuación para cada uno de los tres casos descritos.



Ejemplo 1

Para un oscilador armónico de 100 gramos de masa, con una constante de 30 N/m y un coeficiente de amortiguamiento b= 0.02 kg./s, calcular

a) La frecuencia de oscilación y la frecuencia natural

b) El período y él número de oscilaciones requeridas para reducir la amplitud a la mitad de su valor original.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0.1}} = 14.1421\,\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\omega = \sqrt{200 - \left(\frac{0.02}{2\text{x}0.1}\right)^2} = 14.1386\,\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{14.11} = 0.45\ \text{seg}$$

$$A(t) = \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\gamma t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\gamma t}$$

$$\text{Ln}\frac{1}{2} = \text{Ln}e^{-\gamma t}$$

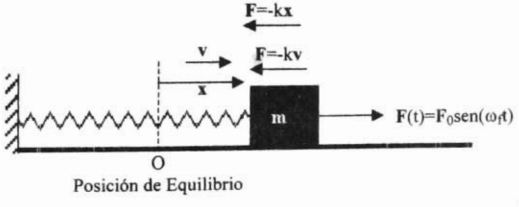
$$t = -\frac{1}{\gamma}\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0.02}{2 * 0.1} = 0.1\,\frac{1}{\text{seg}}$$

t=6.93 seg

$$\text{No. de oscilaciones} = \frac{t}{T} = \frac{6.93}{0.45} = 15.40$$

III: Oscilador Forzado y Amortiguado

Para éste caso el sistema masa-resorte está sujeto además de la fuerza del resorte y la fuerza de amortiguamiento a una fuerza impulsora que depende del tiempo en la forma que muestra la figura



En la figura aparecen tres fuerzas actuando sobre el bloque: la del resorte ($F=-kx$), la de amortiguamiento ($F=-bv$) y la impulsora ($F(t)=F_0\cos \omega_f t$); siendo F_0 el valor máximo de la fuerza impulsora o su amplitud. Aplicando al bloque la 2ª ley de Newton:

$$ma=-kx-bv+F_0\cos\omega_f t$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos(\omega_f t) \qquad \text{VIII.8}$$

El sistema suele pasar por un estado transitorio, de corta duración, en el cual oscila con la frecuencia natural $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, y ya que el bloque es impulsado con una frecuencia ω_f, debe oscilar con esta frecuencia en el estado estable, una vez que pasa el transitorio. La solución para el estado estable de la ecuación VIII.8 es

$$x(t)=A\cos(\omega_f t+\delta) \qquad \text{VIII.9}$$

donde

$$A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_f^{\,2}}} \qquad \text{VIII.10}$$

y

$$\delta=\tan^{-1}\frac{\omega_f b}{m(\omega_0^2-\omega_f^2)} \qquad \text{VIII.11}$$

Nótese que tanto la amplitud como la constante de fase, depende de la frecuencia forzada ω_f para una F_0 dada de la fuerza impulsora. Existe un valor de ω_f para el cual la amplitud A del oscilador forzado es máxima, a está frecuencia se le conoce como frecuencia de resonancia (ω_R) y se obtiene derivando la ecuación VIII.10 con respecto a ω_f e igualando a cero. Su valor está dado por

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$$

y el valor de la amplitud (A_{max}) para la resonancia es

$$A_{max}=\frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$$

En la ecuación VIII.10 se puede apreciar que si γ es cero, entonces la frecuencia de resonancia (ω_R) está dada por:

$$\omega_R = \omega_0$$

y *la amplitud para la frecuencia de resonancia tiende a infinito.*

El fenómeno de resonancia, bajo ciertas condiciones, puede ocasionar serias dificultades a sistemas físicos, como el caso ya descrito del puente de Tacoma, o a edificios sujetos a temblores de tierra cuya frecuencia de oscilación es similar a la frecuencia natural del edificio.

UNIDAD VIII
AUTOEVALUACIÓN

Preguntas

1. ¿Se conserva la energía para un oscilador armónico amortiguado? Explicar su respuesta.
2. ¿Se conserva la energía para un oscilador armónico amortiguado y forzado? Explicar su respuesta.
3. Todos los objetos tienen una frecuencia de resonancia ¿a qué se debe?
4. Los edificios de diferentes alturas sufren diferentes daños en un temblor. ¿Por qué sucede esto?

Problemas

1. Un oscilador armónico amortiguado está constituido por un bloque de 2 kg, un resorte de constante 12 N/m y un amortiguador. Si la amplitud inicial es de 25 cm y se observa que después de 7 oscilaciones se reduce a la mitad, calcular:
   a) El valor de b
   b) La pérdida de energía.

2. Si al dispositivo del problema anterior se le aplica una fuerza dependiente del tiempo del tipo $F(t)=F0\cos \omega_f t$, con $F0=20$ N. Determinar el valor de ω_f para que la amplitud sea máxima y el valor máximo de la amplitud.

Bibliografía

Bedford, Antony y Fowler, Wallace. *Dinámica: Mecánica para Ingeniería.* Addison-Wesley Iberoamericana.

Beer, F.P. y Johnston, E.R. *Mecánica Vectorial para Ingenieros, Estática y Dinámica.* Editorial McGraw Hill.

Fishbane, Gasiorowicz, Thornton. *Física para Ciencias e Ingeniería.* Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

H. Becerril, N. Falcón, y A. Rodríguez. *Elementos de Dinámica.* U.A.M.

J.H. Ginsberg y J. Gening. *Dynamics.* Editorial John Willey & Sons.

R.C. Hibbeler. *Ingeniería Mecánica-Dinámica.* 7a. edición, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Resnick, Halliday, Krane. *Física.* 4a. Edición Vol. 1, Editorial Continental S.A. de C.V.

Serway A. Raymond. *Física.* Tomo I, 4a. edición, Mc Graw-Hill.

Tipler, A. Paul. *Física.* Tomo I, 3a. edición, Editorial Reverté, S.A.

Wolfson, Richard and Pasachoff Jay M. *Física para ciencias e Ingeniería.* Harla, Mx.

Curso SAI de Dinámica
Se terminó de imprimir
en el mes de a bril del año 2007
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo
a cargo de la
Sección de Producción
y Distribución Editoriales
Se imprimieron
100 ejemplares más sobrantes
para reposición.

CURSO SAI DE DINAMICA
PEREZ • SECCION DE IMPRESION
34041 $ 18.00
$ 18.00

ISBN: 970-654-635-9
978-97065-46357

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Coordinación S.A.I

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias